Correction CCB modélisation

I. **Correction : pendule de Foucault**

1. $\overrightarrow{\Omega_T} = \Omega(\cos\lambda\overrightarrow{e_y} + \sin(\lambda)\overrightarrow{e_z})$.

La terre fait un tour sur elle-même en 24 heures donc $\Omega_T = \dfrac{2\pi}{24.3600} = 7,3.10^{-5}\ rad.s^{-1}$.

2. Le référentiel terrestre n'est pas galiléen car il est en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique.

Le pendule subit les forces d'interaction: $\overrightarrow{P}$: son poids et $\overrightarrow{T_f}$: la tension du fil et la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{F}_{ic} = -2m\overrightarrow{\Omega_T}\Lambda\overrightarrow{v}(M)_{R_T} = -2m\Omega_T(\cos\lambda\overrightarrow{e_y} + \sin(\lambda)\overrightarrow{e_z})\Lambda(\dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y}) = 2m\Omega_T\sin\lambda\dot{y}\overrightarrow{e_x} - 2m\Omega_T\sin\lambda\dot{x}\overrightarrow{e_y} + 2m\Omega_T\cos\lambda\dot{x}\overrightarrow{e_z}$.

Par identification on trouve $\omega = \Omega_T\sin\lambda$ et $\omega' = \Omega_T\cos\lambda$.

La force d'inertie d'entraînement est contenue dans le poids, le poids est en effet la somme de l'attraction gravitationnelle et de la force d'inertie d'entraînement.

Remarque: le sujet peut aussi demander de démontrer l'expression de la tension du fil, voilà comment il faut s'y prendre:

La tension du fil est M vers O' donc elle est colinéaire et de sens opposé au vecteur $\overrightarrow{O'M}$. On peut donc écrire $\overrightarrow{T_f} = -\dfrac{||\overrightarrow{T_f}||}{O'M}\overrightarrow{O'M} = -\dfrac{T_f}{l}\overrightarrow{O'M}$ avec $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = -l\overrightarrow{e_z} + x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}$. On en déduit donc la tension du fil: $\overrightarrow{T_f} = -\dfrac{T_f}{l}(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}) + T_f\overrightarrow{e_z}$.

3. On applique la RFD au pendule dans le référentiel terrestre soit: $m\overrightarrow{a}(M)_{R_T} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T_f} + \overrightarrow{F}_{ic}$.

Le poids s'écrit $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$

En projection sur Ox: $m\ddot{x} = -\dfrac{T_f}{l}x + 2m\Omega_T\sin\lambda\dot{y}$

En projection sur Oy: $m\ddot{y} = -\dfrac{T_f}{l}y - 2m\Omega_T\sin\lambda\dot{x}$

En projection sur Oz: $0 = -mg + T_f + 2m\Omega_T\cos\lambda\dot{x}$

Sur Oz on peut négliger la force de Coriolis, il reste donc $T_f = mg$.

4. On divise les équations sur Ox et Oy par la masse et on remplace T_f par mg, on obtient:

$\ddot{x} = -\dfrac{g}{l}x + 2\Omega_T\sin\lambda\dot{y}$

$\ddot{y} = -\dfrac{g}{l}y - 2\Omega_T\sin\lambda\dot{x}$

Par identification avec l'énoncé, on en déduit que $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ et $\omega = \Omega_T\sin\lambda$.

5. **5.a.** D'aprés les notations de l'énoncé: $X[0] = x$, $X[1] = y$, $X[2] = \dot{x}$ et $X[3] = \dot{y}$.

De plus le vecteur $\dot{X}$ s'écrit $\dot{X} = [\dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}] = [X[2], X[3], \ddot{x}, \ddot{y}]$.

D'après les équations du mouvement: $\ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\omega\dot{y} = -\omega_0^2 X[0] + 2\omega X[3]$ et $\ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\omega\dot{x} = -\omega_0^2 X[1] + 2\omega X[2]$ d'où $\dot{X} = [X[2], X[3], -\omega_0^2 X[0] + 2\omega X[3], -\omega_0^2 X[1] + 2\omega X[2]$.

Instruction 1: $[X[2], X[3], -omega0 * *2 * X[0] + 2 * omega * X[3], -omega0 * *2 * X[1] + 2 * omega * X[2]$.

Instruction 2: 0 (en effet la solution sol est le vecteur X dont x est le premier terme)

Instruction 3: 1 (en effet la solution sol est le vecteur X dont y est le second terme)

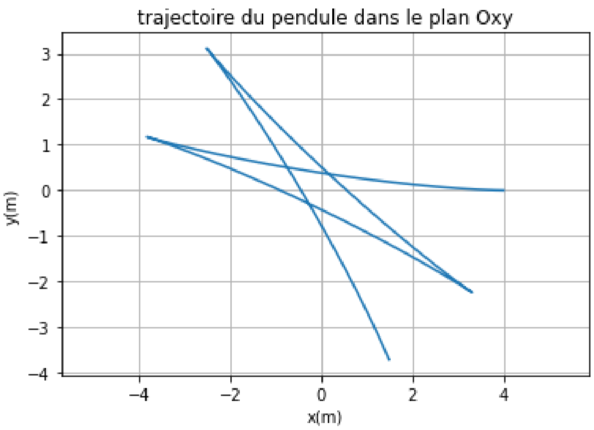
5.b. Instruction 4 : x,y (on trace y en fonction de x)

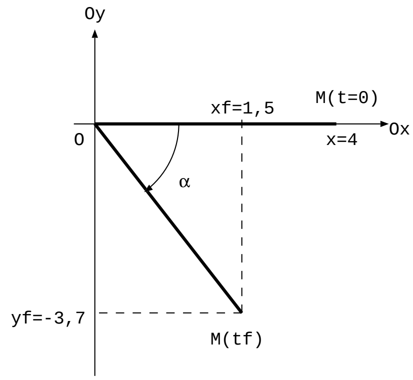
Instruction 5: 'trajectoire du pendule dans le plan Oxy'

Instruction 6: 'x(m)'

Instruction 7: 'y(m)'

5.c. Les conditions initiales dans le code sont $x0 = 4$, $y0 = 0$, $vx0 = 0$ et $vy0 = 0$. Donc le pendule est abandonné sans vitesse initiale depuis le point de coordonnées $(4, 0)$. Le plan d'oscillations du pendule tourne dans le sens horaire soit selon $-Oz$. A la fin de la trajectoire sur la courbe, le pendule se trouve au point de coordonnées $(1.5, -3.7)$. On en déduit $\alpha = \arctan(\frac{-3,7}{1,5}) = -1,19\ rad$.





5.d. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 16,06\ s$.

La durée de la simulation est (d'après le linspace ligne 13) $T = 2T_0 = 32\ s$.

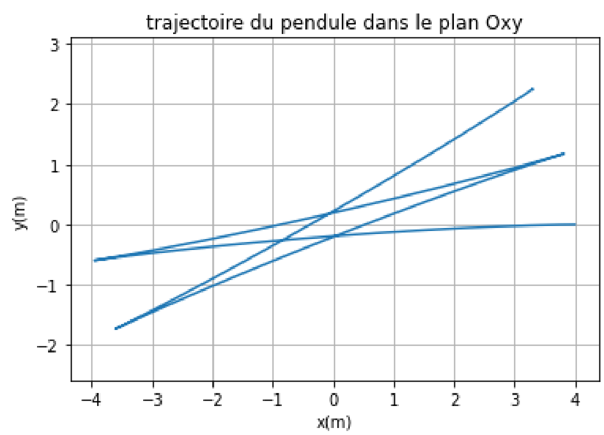
La vitesse angulaire de rotation est $\omega = 500OmegaT = 3,636.10^{-2}\ rad.s^{-1}$.

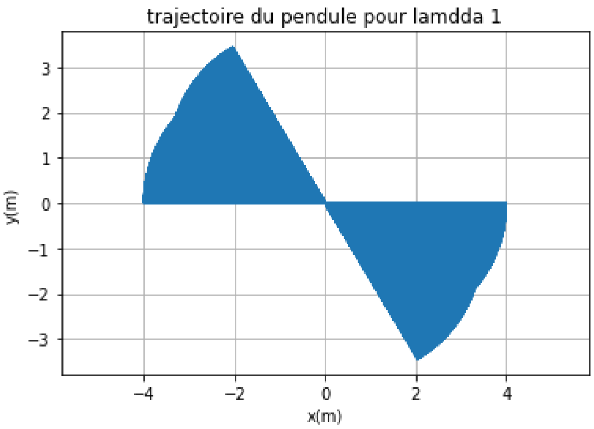
On a donc $-\omega T = -1,16\ rad = \alpha$.

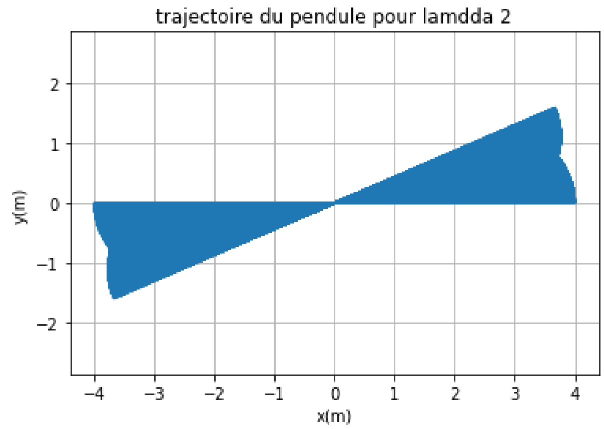
On en déduit que le plan d'oscillations du pendule tourne à la vitesse angulaire $-\omega$ autour de Oz.

5.e. Dans cette nouvelle simulation, le plan d'oscillations à tourner dans le sens trigo soit selon $+Oz$. c'est cohérent avec le fait que ω a changé de signe.

A la fin de la simulation le pendule se trouve au point $(3.3, 2.2)$ soit le plan d'oscillations a tourné d'un angle $\alpha' = \arctan(\frac{2,2}{3,3}) = 0,59\ rad = \frac{-\alpha}{2}$. C'est cohérent avec le fait que la vitesse angulaire ω a été divisé par deux.







.

6. On fait des simulations avec $\omega = \Omega_T \sin\lambda$.

Pour λ_1: le plan d'oscillations tourne dans le sens horaire comme dans la simulation 1 où $\omega > 0$ donc $\sin\lambda_1 > 0$: on est dans l'hémisphère nord.

A la fin de la simulation le pendule se trouve en $(x = 2, y = -3,5)$ soit l'angle de rotation du plan d'oscillations $\alpha = \arctan(\dfrac{-3,5}{2}) = -1,05\ rad$.

On a $\alpha = -\Omega_T \sin(\lambda_1)T$ avec ici $T = 1000T_0 = 16060\ s$ (la durée d'acquisition) d'où $\sin\lambda_1 = \dfrac{-\alpha}{\Omega_T T} = 0,89$ et $\lambda_1 = 64^0$.

Pour λ_2: le plan d'oscillations tourne dans le sens trigo, comme dans la simulation 2 où $\omega < 0$ donc $\sin\lambda_2 < 0$: on est dans l'hémisphère sud.

A la fin de la simulation le pendule se trouve en $(x = 3,7, y = 1,6)$. En procédant de la même façon (la durée d'acquisition est la même) on a $\lambda_2 = -20^0$.

7. Au pôle nord, le plan d'oscillations tourne dans le sens horaire (selon $-Oz$) à la vitesse angulaire $-\Omega_T \sin(\pi/2) = -\Omega_T$.

La période de rotation est donc de 24 h.

Au pôle sud, le plan d'oscillations tourne dans le sens trigo (selon $+Oz$) à la vitesse angulaire $-\Omega_T \sin(-\pi/2) = +\Omega_T$.

La période de rotation est la même mais le pendule tourne dans le sens trigo (selon $+Oz$).

8. A l'équateur, la latitude est nulle donc la vitesse angulaire du plan d'oscillations du pendule est nulle, le plan d'oscillations ne tourne pas.

II. **Correction circulation**

1. On a la relation $q(x,t) = v(x,t)c(x,t)$.

2. On considère le système élémentaire compris entre x et $x + dx$:

Nombre de voitures dans le système à l'instant t: $N(t) = c(x,t)dx$

Nombre de voitures dans le système à l'instant $t + dt$: $N(t + dt) = c(x, t + dt)dx$

Nombre de voitures qui entrent dans le système entre t et $t + dt$: $\delta N_e = q(x,t)dt$

Nombre de voitures qui sortent du système entre t et $t + dt$: $\delta N_s = q(x + dx, t)dt$

La conservation du nombre de voitures s'écrit $N(t + dt) = N(t) + \delta N_e - \delta N_s$ soit $(c(x, t + dt) - c(x, t))dx = -(q(x+dx, t)-q(x, t))dt$ soit en faisant des DL à l'ordre 1 en dx et en dt: $\dfrac{\partial c}{\partial t}dxdt = -\dfrac{\partial q}{\partial x}dxdt$ soit $\dfrac{\partial c}{\partial t} = -\dfrac{\partial q}{\partial x}$.

3. La vitesse est de la forme $v(x,t) = ac(x,t) + b$ avec:

$v(x,t) = v_{max} = b$ (pour $c = 0$)

$v(x,t) = 0 = ac_{max} + b$

On a donc $v(x,t) = -\dfrac{v_{max}}{c_{max}}c(x,t) + v_{max}$.

4. On a donc $q(x,t) = v(x,t)c(x,t) = -\dfrac{v_{max}}{c_{max}}c^2(x,t) + v_{max}c(x,t)$.

La courbe est tracée pour c variant de 0 à $c_{max} = 0,25\ m.s^{-1}$.

D'aprés l'énoncé $L_0 = \dfrac{1}{c_{max}} = 4\ m$.

Pour trouver v_{max} on peut utiliser un point particulier de la courbe, par exemple le maximum de cette fonction qui a pour abscisse $c = \dfrac{c_{max}}{2} = 0,125\ vehicule.m^{-1}$, pour cet abscisse l'ordonnée est $q_{max} = -\dfrac{v_{max}}{c_{max}}\dfrac{c_{max}^2}{4} + v_{max}\dfrac{c_{max}}{2} = \dfrac{v_{max}c_{max}}{4} = 0,85\ vehicules.s^{-1}$. Soit $v_{max} = \dfrac{4q_{max}}{c_{max}} = 13,6\ m.s^{-1}$.

Le débit est nul lorsque la concentration est faible, et le débit est nul également lorsque la concentration en voiture est grande car dans ce cas, les voitures sont trop nombreuses, il y a un bouchon, elles sont à l'arrêt. Le débit présente un maximum lorsque la concentration est égale à $c_{max}/2$, il n'y a pas trop de voitures donc elles peuvent rouler assez vite.

5. La route présente une zone de circulation très dense comprise entre $x_1 = 100\ m$ et $x_2 = 200\ m$. La concentration de voitures dans cette zone est de $0,1\ vehicules.m^{-1}$. Avant cette zone et après cette zone, le trafic est moins dense la concentration est de $0,05\ vehicules.m^{-1}$. La longueur de la route est $Lr = 600\ m$.

instruction 2: $100, 200$

instruction 3: 0.05

instruction 4: 0.1

Comme on peut s'y attendre, c'est dans la zone où la concentration de voitures est plus grande que la vitesse des voitures est plus faible.

Le débit de voitures est de $0,1.8,3 = 0,83\ vehicules/s$ dans la zone de forte concentration et de $0,05.11,2 = 0,56\ vehicules/s$ dans la zone de faible concentration. Le débit de voitures est donc plus important dans la zone de forte concentration.

6. On a $\dfrac{\partial c}{\partial t}(x,t) = \dfrac{c(x, t + dt) - c(x,t)}{dt}$ soit $\dfrac{\partial c}{\partial t}(x_i, t_j) = \dfrac{c(x_i, t_{j+1}) - c(x_i, t_j)}{dt} = \dfrac{C[i, j + 1] - C[i, j]}{dt}$.

7. On a $\dfrac{\partial q}{\partial x}(x_i, t_j) = \dfrac{q(x_{i+1}, t_j) - c(x_{i-1}, t_j)}{2dx} = \dfrac{Q[i + 1, j + 1] - Q[i - 1, j]}{2dx}$.

8. On remplace dans l'équation $\dfrac{\partial q}{\partial x} = -\dfrac{\partial c}{\partial t}$ soit $\dfrac{C[i, j + 1] - C[i, j]}{dt} = \dfrac{Q[i + 1, j + 1] - Q[i - 1, j]}{2dx}$ d'où $C[i, j + 1] = C[i, j] + \dfrac{dt}{2dx}(Q[i + 1, j + 1] - Q[i - 1, j])$.

9. L'instruction 6 définit le tableau Q par: $Q = -C**2*vmax/cmax + vmax*C$

La relation de récurrence permet de compléter l'instruction 7: $C[i,j+1] = C[i,j] + (Q[i+1,j+1] - Q[i-1,j])*dt/2/dx$.

Le pas de temps est $dt = \dfrac{Temps}{Nt} = \dfrac{60}{1000} = 60\ ms$.

Pour $N = 200$, $t_1 = 200dt = 12\ 000\ ms = 12\ s$.

Pour $N = 400$, $t_2 = 24\ s$ et pour $N = 600$, $t_3 = 36\ s$.

L'avant de la zone de forte concentration de voitures se trouve en $x = 200\ m$ à $t = 0\ s$, en $x = 300\ m$ à $t = 12\ s$, en $x = 400\ m$ à $t = 24\ s$ et en $x = 400\ m$ à $t = 36\ s$. La vitesse des voitures est donc de $\frac{100}{12} = 8,3\ m.s^{-1}$, c'est la vitesse initiale des voitures dans la zone de forte concentration.

La zone de forte concentration de voitures est de plus en plus large (100 m à $t = 0\ s$ pour 200 m à $t = 36\ s$) et la concentration maximale de voitures diminue au cours du temps. Au cours du temps les voitures s'éloignent les unes des autres et la zone de forte concentration avance. La circulation se fluidifie.