Sujet CCB modélisation physique

Equation de la conservation de la masse

1. dx est suffisamment petit pour supposé la section $A(x,t)$ uniforme sur le système élémentaire de longueur dx on a donc: $dm(t) = A(x,t)\mu(x,t)dx$ et $dm(t+dt) = A(x,t+dt)\mu(x,t+dt)dx$.

2. La masse qui entre dans le système entre t et $t+dt$ s'écrit en fonction du débit massique en x: $D_{me} = D_m(x,t) = \mu(x,t)A(x,t)v(x,t)$, on en déduit la masse entrante $\delta m_e = D_m(x,t)dt = \mu(x,t)A(x,t)v(x,t)dt$.

De la même manière la masse sortante entre t et $t+dt$, se déduit du débit massique en $x+dx$ soit $\delta m_s = D_m(x+dx)dt = \mu(x+dx,t)A(x+dx,t)v(x+dx,t)dt$.

3. La conservation de la masse s'écrit $dm(t+dt) - dm(t) = +\delta m_e - \delta m_s$ soit $(A(x,t+dt)\mu(x,t+dt) - A(x,t)\mu(x,t))dx = (\mu(x,t)A(x,t)v(x,t) - \mu(x+dx,t)A(x+dx,t)v(x+dx,t))dt$

Avec dt et dx petits on a $\dfrac{\partial(\mu(x,t)A(x,t))}{\partial t}dtdx = -\dfrac{\partial(\mu(x,t)A(x,t)v(x,t))}{\partial x}dxdt$ soit $\dfrac{\partial(\mu(x,t)A(x,t))}{\partial t} + \dfrac{\partial(\mu(x,t)A(x,t)v(x,t))}{\partial x} = 0$.

4. $\mu(x,t)A(x,t) = (\mu_0 + \mu_1(x,t))(A_0 + a_1(x,t)) = \mu_0 A_0 + \mu_0 a_1 + \mu_1 a_1 + \mu_1 A_0 \approx \mu_0 A_0 + \mu_0 a_1 + \mu_1 A_0$ en négligeant le terme $\mu_1 a_1$ qui est d'ordre 2.

$\mu(x,t)A(x,t)v(x,t) \approx \mu_0 A_0 v(x,t)$, $v(x,t)$ est d'ordre 1 donc on ne garde que les termes d'ordre 0 dans les expressions de $A(x,t)$ et $\mu(x,t)$.

L'équation de conservation de la masse à l'ordre 1 s'écrit donc $\dfrac{\partial(\mu_0 A_0 + \mu_1(x,t)A_0 + a_1(x,t)\mu_0)}{\partial t} + \dfrac{\mu_0 A_0 v(x,t)}{\partial x} = 0$ soit $A_0\dfrac{\partial \mu_1(x,t)}{\partial t} + \mu_0\dfrac{\partial a_1(x,t)}{\partial t} + \mu_0 A_0\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0$ relation (1).

5. L'équation d'Euler s'écrit: $\mu(x,t)(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}) = -\overrightarrow{\text{grad}}P(x,t)$. Il ne reste que la résultante des forces de pression, la viscosité est nulle et le poids est négligé.

Le terme $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est appelée l'accélération locale (point de vue Eulérien).

Le terme $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ est l'accélération convective.

6. L'équation d'Euler devient: $(\mu_0 + \mu_1(x,t))(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}) = -\overrightarrow{\text{grad}}(P_0 + p_1(x,t))$.

Le terme $\mu_1(x,t)\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ est d'ordre 2, le terme d'accélération convective est d'ordre 2 donc à l'ordre 1, il reste: $\mu_0\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p_1(x,t)) = -\dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}\vec{e_x}$.

Soit en projection sur Ox: $\mu_0\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}$ relation (2).

7. La distensibilité s'écrit $D = \dfrac{1}{A_0 + a_1(x,t)}\dfrac{\partial A(x,t)}{\partial P(x,t)} \approx \dfrac{1}{A_0}\dfrac{A(x,t) - A_0}{P(x,t) - P_0} \approx \dfrac{1}{A_0}\dfrac{a_1(x,t)}{p_1(x,t)}$ en effet le terme $\dfrac{\partial A(x,t)}{\partial P(x,t)}$ s'approxime à la petite variation de A divisée par la petite variation de P.

On a donc $a_1 = A_0 D p_1$ (relation (3)).

8. La compressibilité isentropique s'écrit $\chi_S = \dfrac{1}{\mu(x,t)}\dfrac{\partial \mu(x,t)}{\partial P(x,t)} \approx \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\mu(x,t) - \mu_0}{P(x,t) - P_0} \approx \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\mu_1(x,t)}{p_1(x,t)}$ en effet le terme $\dfrac{\partial \mu(x,t)}{\partial P(x,t)}$ s'approxime à la petite variation de μ divisée par la petite variation de P.

On a donc $\mu_1 = \chi_S \mu_0 p_1$ relation (4).

9. Dans la relation (1) de conservation de la masse $A_0\dfrac{\partial \mu_1(x,t)}{\partial t} + \mu_0\dfrac{\partial a_1(x,t)}{\partial t} + \mu_0 A_0\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0$, on remplace μ_1 et p_1 par leurs expressions obtenues relations (3) et (4) soit: $\mu_1 = \chi_S \mu_0 p_1$ et $a_1 = A_0 D p_1$.

On a donc $A_0 \chi_S \mu_0 \dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} + \mu_0 A_0 D\dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} + \mu_0 A_0\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0$.

En simplifiant par $A_0\mu_0$, il vient: $\chi_S\dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} + D\dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0$.

10. On dérive la relation (2) par rapport à x: $\dfrac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2} = -\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}) = -\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x})$ en intervertissant les dérivées par rapport à t et à x.

En utilisant la relation (5): $\dfrac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2} = -\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t}(-\chi_S \dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} - D\dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}) = \mu_0(\chi_S + D)\dfrac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2}$.

On reconnaît une équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2} - \mu_0(\chi_S + D)\dfrac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = 0$ avec pour célérité des ondes sonores dans le tube $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0(\chi_S + D)}}$.

Unités:

$[\chi_S] = [D] = [\dfrac{1}{P}] = [\dfrac{S}{F}] = \dfrac{m^2}{kg.m.s^{-2}} = m.kg^{-1}.s^2$.

$[(\mu_0(\chi_S + D))^{-1/2}] = (kg.m^{-3}.m.kg^{-1}.s^2)^{-1/2} = (m^{-2}.s^2)^{-1/2} = m.s^{-1}$: on trouve bien une vitesse.

11. AN: $c = 256\ m.s^{-1}$.

Traitement des données numériques

12. Le tube doit s'abîmer à force d'être écrasé par le passage des voitures. Pour conserver une valeur constante de sa distensibilité D, il faut le changer régulièrement.

13. Chaque ligne représente une journée, le tableau mesures contient les données pour 10 jours.

14. Le 5ième jour correspond à la 5 ième ligne du tableau soit la ligne 4 (la première ligne est la ligne 0). 13 heures correspond à la 14 ième heure du jour soit le terme numéro 13 dans la ligne.

Instruction 1: mesures[4,13]

15. Instruction 2.1: 10 (nombre de jours du recensement de voitures)

Instruction 2.2: np.sum(mesures[i,:]) (sur chaque ligne i, soit chaque jour, on fait la somme du nombre de voitures à chaque heure)

16. Instructions 3:

for i in range(10): i correspond au numéro du jour: jour 1 pour $i = 0$ à jour 10 pour $i = 9$

—for j in range(0,24): j correspond à l'heure de la journée de $0h$ pour $j = 0$ à $23h$ pour $j = 23$

— — if mesures[i,j]>=max:

— — —max=mesures[i,j]

— — —jour,heure=i+1,j

print('pic atteint le',jour,'ème jour entre',heure,'et',heure+1,'heures')

17.

plt.bar(heure,mesures[0,:])

plt.grid()

plt.xlabel('heure')

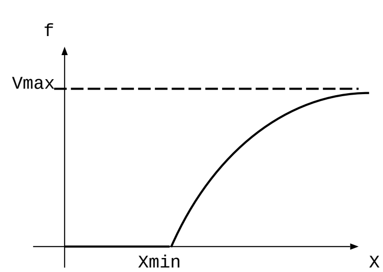
plt.ylabel('nombre de vehicules')

plt.title('nombre de vehicules detectes par jour')

Description du modèle

18. Pour $X = X_{min}$: $f(X) = 0$: la vitesse est nulle lorsque les voitures qui se suivent sont à la distance X_{min} l'une de l'autre et pour $X \to \infty$: $f(X) \approx V_{max}$: lorsque les voitures qui se suivent sont très éloignées l'une de l'autre, elles peuvent rouler à la vitesse maximale.

$f(X)$ est bien une fonction croissante.



19. La vitesse V est égale à $f(X)$. Pour une valeur de V donnée, il n'y a qu'une valeur de $X > X_{min}$ possible donc les voitures sont à la même distance X les unes des autres. Lorsque V augmente, cela veut dire que $f(X)$ augmente c'est donc que X augmente (fonction f croissante). La fonction $f(X)$ tend vers V_{max} sans la dépasser.

20. Pour $X < X_{min}$, $V = f(X) = 0$: les véhicules sont à l'arrêt.

21. On cherche d tel que $f(d) = V = V_{max}(1 - e^{-(d-X_{min})/20})$ avec $V = 20\ m/s$, $V_{max} = 30\ m/s$ et $X_{min} = 7\ m$.

On a donc $1 - e^{-(d-X_{min})/20} = \dfrac{V}{V_{max}}$ soit ${}^{-(d-X_{min})/20} = 1 - \dfrac{V}{V_{max}}$ ou encore $\dfrac{d - X_{min}}{20} = -\ln(1 - \dfrac{V}{V_{max}})$.

On a donc $d = X_{min} - 20\ln(1 - \dfrac{V}{V_{max}}) = 30\ m$.

22. La vitesse est $V = 20\ m/s$ donc la distance parcourue pendant $2\ s$ est $40\ m$. La distance obtenue précédemment est $d = 30\ m$ entre deux véhicules qui se suivent, elle est inférieure à la distance de sécurité conseillée par le code.

Résolution numérique : étude de l'effet d'un ralentissement

23. On doit compter le nombre d'instants auxquels on fait la mesure soit M=len(resultat) (resultat est une liste qui contient les positions de la voiture 0 aux instants t_m, le nombre de terme dans la liste résultat est le nombre d'instants étudiés).

24. On crée une matrice L avec N lignes (nombre de véhicules) et M colonnes (nombres d'instants): L=np.zeros((N,M))

25. Les conditions initiales correspondent aux positions des différentes voitures à $t = 0$, cela correspond au contenu de la première colonne (la colonne $n = 0$).

for n in (0,N):

—–L[n,0]=-d*n

$n = 0$ 1ère voiture à la position initiale $x = 0$, $n = 1$ 2ième voiture à la position initiale $x = -d$,.. $n = 9$ 10 ième et dernière voiture à la position initiale $x = -9d$

26. La première ligne de L est confondue avec la liste resultat (positions du véhicule de tête aux différents instants).

L[0,:]=resultat

ou for m in range(0,M):

—–L[0,m]=resultat(m)

27. def f(X):

—–if X<=Xmin:

—- —-return 0

—–else:

—– —–return Vmax*(1-np.exp(-(X-Xmin)/20)

28. La relation (6) s'écrit $\dot{x}_n = f(x_{n-1}(t) - x_n(t))$.

La vitesse du véhicule n à l'instant t est $\dot{x}_n = \dfrac{x_n(t+dt) - x_n(t)}{dt} = \dfrac{x_n^{m+1} - x_n^m}{t_{m+1} - t_m}$ ou $\dot{x}_n = \dfrac{x_n(t) - x_n(t-dt)}{dt} = \dfrac{x_n^m - x_n^{m-1}}{t_m - t_{m-1}}$.

On peut évaluer la vitesse en utilisant la position à l'instant t et la position à l'instant précédent ou la position à l'instant t et la position à l'instant ultérieur.

Ici l'énoncé demande de trouver la vitesse à partir de t_{m+1} et t_m donc on utilise $\dot{x}_n = \dfrac{x_n(t+dt) - x_n(t)}{dt} = \dfrac{x_n^{m+1} - x_n^m}{t_{m+1} - t_m} = f(x_{n-1}(t_m) - x_n(t_m)) = f(x_{n-1}^m - x_n^m)$.

On a donc $\dfrac{x_n^{m+1} - x_n^m}{t_{m+1} - t_m} = f(x_{n-1}^m - x_n^m)$ soit $x_n^{m+1} = x_n^m + (t_{m+1} - t_m) f(x_{n-1}^m - x_n^m)$.

avec $x_n^{m+1} = L[n, m+1]$, $x_{n-1}^m = L[n-1, m]$ et $x_{n+1}^m = L[n+1, m]$ soit la relation de récurrence $L[n, m+1] = L[n-1, m] + (T[m+1] - T[m]) * f(L[n-1, m], L[n, m])$.

29. T=resultat[1]

30. On reprend le résultat de Q28: $x_n^{m+1} = x_n^m + (t_{m+1} - t_m) f(x_{n-1}^m - x_n^m)$ avec $x_n^{m+1} = L[n, m+1]$, $x_{n-1}^m = L[n-1, m]$ et $x_{n+1}^m = L[n+1, m]$ soit la relation de récurrence $L[n, m+1] = L[n-1, m] + (T[m+1] - T[m]) * f(L[n-1, m], L[n, m])$.

for m in range(0,M-1):

—–for n in range(1,N):

—- —- L[n,m+1]=L[n-1,m]+(T[m+1]-T[m])*f(L[n-1,m],L[n,m])

31. Jusqu'à l'instant $t = 5\ s$, les voitures roulent à vitesse constante et sont équidistantes les unes des autres.

A l'instant $t = 5\ s$, la voiture de tête freine, elle oblige donc les voitures derrière elle à freiner. Un ralentissement se forme qui se propage selon $-Ox$ puisque la zone où les voitures sont proches (points rapprochés sur le schéma) recule au cours du temps.

A l'instant $t = 6\ s$, l'avant du ralentissement est à la position $x = 100\ m$ et à l'instant $t = 17\ s$, l'avant du ralentissement est à la position $x = 60\ m$. Il s'est propagé à la vitesse moyenne de $\frac{40}{11} = 3,6\ m/s$ selon $-Ox$.

32. Quand on change t en $-t$ dans l'équation de transport, l'équation devient $\dfrac{\partial X}{\partial t} + c\dfrac{\partial X}{\partial x} = 0$, elle est donc modifiée. Or changer t en $-t$ revient à inverser le sens du temps. La modification de l'équation de transporte montre que le phénomène n'est pas réversible.

33. On a $\dfrac{\partial X(x+ct)}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial X(x+ct)}{\partial t} = c\dfrac{\partial X}{\partial t}$. On a donc bien $\dfrac{\partial X}{\partial t} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial X}{\partial x} = 0$.

$X(x+ct)$ caractérise une onde qui se propage (t et x sont dans le même terme) selon $-Ox$ (les termes devant x et t ont le même signe). c représente la célérité des ondes.