# Mécanique quantique

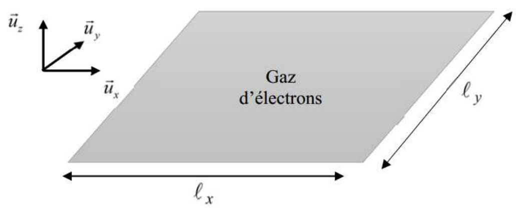
## I. **Puits quantiques**

En 1980, Klaus Von Klitzing découvrit, dans le cas de semi-conducteurs à très basse température plongés dans un champ magnétique intense, que la résistance Hall était quantifiée: ce résultat est alors qualifié d'effet Hall quantique.

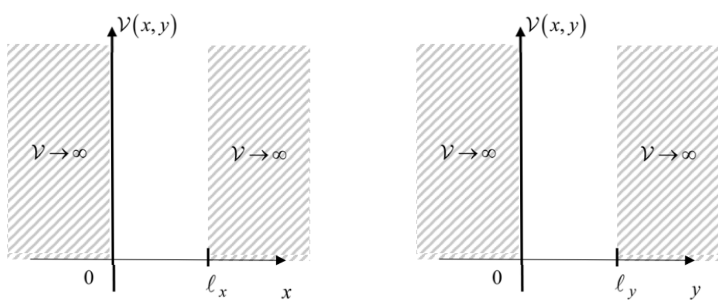
L'explication de ces comportements fait appel à la mécanique quantique: les niveaux d'énergie d'un gaz bidimensionnel d'électrons dans un champ magnétique perpendiculaire, appelés niveaux de Landau, sont discrets et régulièrement espacés.

### Modélisation sans champ magnétique

On considère pour cela les électrons mobiles précédents comme un gaz de particules quantiques libres n'interagissant pas entre-elles et confinées dans une structure cristalline particulière qui ne leur permet de se déplacer que sur une distance $l_x$ selon $\overrightarrow{u_x}$ et $l_y$ selon $\overrightarrow{u_y}$.




On assimile cette situation à celle d'un puits de potentiel infini rectangulaire de longueur $l_x$ et de largeur $l_y$ pour lequel l'énergie potentielle $V(x, y)$ s'écrit: $V(x, y) = 0$ à l'intérieur du puits et $V(x, y) \to \infty$ en dehors du puits




On suppose les directions $x$ et $y$ indépendantes de sorte à pouvoir traiter le problème à une seule dimension suivant $x$ dans un premier temps.

**1.** Rappeler l'inégalité de Heisenberg reliant l'indétermination quantique sur la position $x$ et sur la quantité de mouvement $p_x$. En déduire l'expression de l'incertitude sur l'énergie de la particule dans le puits en fonction de $\hbar$, $l_x$ et $m$ (la masse de l'électron).

On note $\underline{\psi}_{1D}(x, t) = \underline{\phi}(x)e^{-iE_x t/\hbar}$ la fonction d'onde associée à l'énergie $E_x$ de l'électron confiné dans un puits infini à une dimension de largeur $l_x$, avec $\underline{\phi}(x)$ une fonction a priori complexe ne dépendant que de $x$ et $i$ le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

**2.** Que représente $|\underline{\psi}_{1D}(x, t)|^2$ ? Justifier le caractère stationnaire des états de l'électron.

**3.** Écrire la condition de normalisation portant sur l'axe Ox. Quelles sont les conditions aux limites à imposer à la fonction $\underline{\phi}(x)$?

**4.** Donner un exemple ayant des conditions aux limites similaires dans un autre domaine de la physique.

On rappelle qu'une fonction d'onde $\underline{\psi}$ associée à une énergie $E$ des états stationnaires d'une particule quantique est solution de l'équation de Schrödinger: $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\underline{\psi} + V\underline{\psi} = i\hbar\dfrac{\partial\underline{\psi}}{\partial t}$ où $\Delta\underline{\psi}$ désigne le Laplacien de la fonction d'onde.

**5.** Montrer que l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde $\underline{\phi}(x)$ à l'intérieur du puits peut s'écrire : $\ddot{\underline{\phi}} + k_x^2\underline{\phi} = 0$ où l'on donnera l'expression de $k_x$ en fonction de $E_x$, $m$ et $\hbar$.

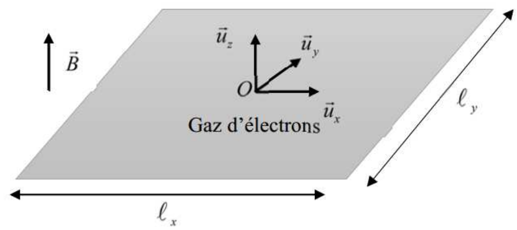
**6.** En déduire $\underline{\phi}(x)$ et déduire des conditions aux limites que $k_x$ est quantifiée et donc que l'énergie $E_x$ est quantifiée et s'écrit: $E_x = \dfrac{n_x^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml_x}$ avec $n_x$ un entier positif non nul.

Commenter par rapport au résultat de l'inégalité de Heisenberg.

**7.** On souhaite dans un second temps prendre en compte le confinement dans la direction $y$ pour lequel on suppose par analogie que l'énergie est aussi quantifiée. Exprimer par analogie la pulsation spatiale $k_y$ en fonction de $n_y$ et $l_y$.

**Modélisation en présence d'un champ magnétique**

En présence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$, il convient de modifier l'équation de Schrödinger.




On choisit l'origine du repère $(Oxyz)$ au centre du gaz d'électrons. Soit $\underline{\psi}_{2D}(x, y, t) = \underline{\phi}(x, y)e^{-iEt/\hbar}$ la fonction d'onde associée à l'énergie $E$ des états stationnaires d'un électron confiné et plongé dans un champ magnétique.

Une modélisation consiste à écrire $\underline{\phi}(x, y)$ sous la forme $\underline{\phi}(x, y) = \Omega(x)e^{ik_y y}$. L'électron a pour potentiel $V(x) = \dfrac{1}{2}m\omega_0^2(x - x_0)^2$ avec $\omega_0 = \dfrac{eB}{m}$ et $x_0 = \dfrac{\hbar k_y}{eB}$.

**8.** Quel système présente une énergie potentielle similaire dans un autre domaine de la physique ? Représenter $V(x)$.

**9.** La modélisation impose au centre $x_0$ de l'énergie potentielle effective d'être situé à l'intérieur du gaz d'électrons. Quelle est alors la valeur maximale possible pour $k_y$?

**10.** En supposant que la quantification du module d'onde $k_y$ reste identique à celle du puits infini unidimensionnel de la question 7, montrer que l'entier $n_y$ doit satisfaire à l'inégalité: $n_y \leq \dfrac{eB}{h}l_x l_y$.

**11.** En tenant compte du spin de l'électron, c'est-à-dire qu'il existe deux états possibles sur un même niveau d'énergie, en déduire $g$ le nombre maximum d'états d'un électron d'énergie $E$.

Le système considéré est toujours le gaz d'électrons contenant $N_e$ électrons dans une forme parallélépipédique de hauteur $b$ de longueur $l_x$ et de largeur $l_y$. Ce système est en équilibre à la température $T$.

**12.** Exprimer $N_e$ à l'aide de la densité volumique $n_v$ d'électrons supposée uniforme et des caractéristiques géométriques du système considéré.

**13.** Lorsque la température $T$ est faible, on admettra que seul le niveau fondamental d'énergie est occupé. Proposer une inégalité entre $N_e$ et $g$ pour satisfaire à une telle condition et montrer qu'elle n'est réalisable que pour un champ magnétique tel que : $B \geq B_{min}$ où l'on donnera l'expression de $B_{min}$ en fonction de $n_v$, $h$, $e$ et $b$.

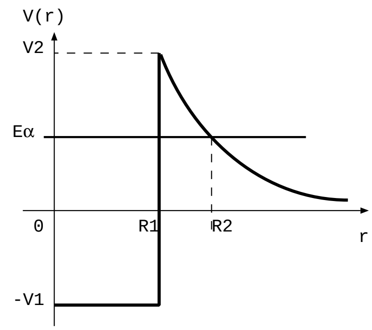
## II. **Radioactivité alpha**

La désintégration $\alpha$ d'un noyau radioactif $X_Z^A$, appelé noyau père, conduit à l'émission d'un noyau d'hélium 4 noté $He_2^4$ encore appelé particule $\alpha$. De cette désintégration résulte un noyau dit fils $Y^{A-4}$. Ce mode de désintégration est résumé par l'équation bilan: $X_Z^A \to He_2^4 + Y^{A-4}$.

**1.** Préciser la constitution de la particule $\alpha$. Cette particule est-elle sensible aux champs électriques ?

**2.** Exprimer le nombre de protons du noyau fils en précisant la loi de conservation qui permet ce calcul.

Dans une théorie élémentaire de la radioactivité $\alpha$ proposée par Gamow en 1928, on considère que la particule $\alpha$ préexiste dans le noyau père, considéré comme résultant de la réunion du noyau fils et de la particule $\alpha$. La loi d'interaction entre ces deux particules (particule $\alpha$ et noyau fils) est définie par leur énergie potentielle $V(r)$ représentée en fonction de leur distance $r$. On note $E_\alpha$ l'énergie de la particule $\alpha$ (le noyau fils est très lourd, on le suppose immobile).




**3.** A quelle interaction est liée le puits de potentiel? donner son sens et son origine.

**4.** A l'extérieur du puits de potentiel ($r > R_1$), une seule interaction est prise en compte. L'expression de l'énergie potentielle associée est de la forme $V(r) = \dfrac{K}{r}$. De quelle interaction s'agit-il ? Préciser l'expression de $K$ en fonction en fonction de $e$, $Z$ et $\epsilon_0$.

**5.** Expliquer pourquoi l'émission $\alpha$ ne peut pas s'expliquer par la mécanique classique. Quel est le nom de l'effet associé au passage de la particule $\alpha$ à travers la barrière coulombienne? A quelle condition il pourra y avoir des désintégrations $\alpha$?

Pour les questions suivantes, nous nous intéresserons au polonium 210, noté $Po_{84}^{210}$, pour lequel la particule $\alpha$ émise possède une énergie $E_\alpha = 5,4\ Mev$. Pour décrire la désintégration $\alpha$ de ce noyau, vous prendrez $R_1 = 7,61.10^{-15}\ m$ et $V_1 = 10\ MeV$. Données: $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}\ F.m^{-1}$, $e = 1,6.10^{-19}\ C$, $1\ eV = 1,6.10^{-19}\ J$, masse des neutrons et protons: $m = 1,67.10^{-27}\ kg$.

**6.** Calculer les valeurs numériques de $R_2$ et $V_2$ associées à cette désintégration. La barrière est appelée barrière épaisse, justifier ce nom ici.

On note $P$ le coefficient de transmission de la particule $\alpha$ à travers la barrière. Pour le polonium 210, on a $P = 7.10^{-29}$.

**7.** Exprimer et calculer la vitesse de la particule $\alpha$ dans le puits de potentiel de profondeur $-V_1$. La particule $\alpha$ fait des allers-retours dans le puits de potentiel et frappe sur les parois du puits de potentiel. Exprimer et calculer le nombre d'allers-retours $f$ que fait la particule $\alpha$ par seconde dans le noyau père.

**8.** Donner l'expression de la probabilité par unité de temps $\lambda$ d'émission d'une particule $\alpha$ par le noyau père en fonction de $f$ et $P$. $\lambda$ est encore appelée constante radioactive. Calculer la valeur de la constante radioactive du polonium 210.