# Sujet CCINP TPC 2020

**Modélisation sans champ magnétique**

**1.** L'inégalité de Heisenberg s'écrit $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ ou encore $\Delta x \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2m}$ avec $\Delta x = l_x$, l'incertitude sur la position de la particule, donc l'incertitude sur la vitesse est telle que $\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2ml_x}$. On a $E = \frac{mv_x^2}{2}$ dans le puits puisque l'énergie potentielle y est nulle soit $\Delta E = \frac{m\Delta v_x^2}{2} \geq \frac{\hbar^2}{8ml_x^2}$.

**2.** $|\underline{\psi}_{1D}(x,t)|^2$ représente la densité de probabilité de trouver la particule en $x$. Ici $|\underline{\psi}_{1D}(x,t)|^2 = |\underline{\phi}(x)|^2$ Cette densité ne dépend pas du temps, l'état est dit stationnaire.

**3.** La condition de normalisation portant sur l'axe Ox est $\int_0^{l_x} |\underline{\psi}_{1D}(x,t)|^2 dx = 1$ ou encore $\int_0^{l_x} |\underline{\phi}(x)|^2 dx = 1$. Cette relation traduit que la probabilité de trouver la particule entre $x = 0$ et $x = l_x$ est de 1.

La particule ne peut pas se trouver dans les zones où le potentiel est infini, donc la fonction d'onde est nulle pour $x < 0$ et $x > l_x$. La fonction d'onde est continue soit $\underline{\phi}(x = 0) = 0$ et $\underline{\phi}(x = l_x) = 0$.

**4.** La particule est piégée entre $x = 0$ et $x = l_x$ et on a des noeuds de probabilité de présence aux extrémités du puits. Le système analogue est la corde de Melde sur laquelle se forment des ondes stationnaires avec deux noeuds aux extrémités.

**5.** On a $\Delta\underline{\psi} = \frac{\partial^2\underline{\psi}}{\partial x^2} = \underline{\phi}''(x)e^{-iE_x t/\hbar}$ et $\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial t} = -\frac{iE_x}{\hbar}\underline{\phi}(x)e^{-iE_x t/\hbar}$.

En remplaçant dans l'équation de Schrödinger on trouve $-\frac{\hbar^2}{2m}\underline{\phi}'' + 0 = i\hbar(-\frac{iE_x}{\hbar})\underline{\phi}(x) = E_x\underline{\phi}(x)$ soit $\ddot{\underline{\phi}} + \frac{2mE_x}{\hbar^2}\underline{\phi} = 0$. On reconnaît un OH de pulsation spatiale $k_x = \sqrt{\frac{2mE_x}{\hbar^2}}$.

**6.** Dans le puits infini on peut prendre des solutions réelles de la forme $\phi(x) = A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)$. On applique les équations de continuité soit $\phi(x = 0) = 0 = A$ et $\phi(x = l_x) = 0 = B\sin(k_x l_x)$ soit $k_x l_x = n_x\pi$ et $k_x = \frac{n_x\pi}{l_x}$.

On utilise la relation $k_x = \sqrt{\frac{2mE_x}{\hbar^2}}$ soit $E_x = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} = \frac{n_x^2\pi^2\hbar^2}{2ml_x^2}$.

Le résultat de l'inégalité de Heisenberg qui donne l'incertitude sur l'énergie correspond (en ordre de grandeur) à l'énergie de l'état fondamentale pour $n = 1$ soit l'énergie minimale de l'électron.

**7.** Par analogie on a $k_y = \frac{n_y\pi}{l_y}$

**Modélisation en présence d'un champ magnétique**

**8.** L'énergie potentielle est celle d'un oscillateur harmonique de masse $m$, de pulsation propre $\omega_0$ et de position d'équilibre $x_0$.

**9.** On doit avoir $0 \leq x_0 \leq l_x$. En remplaçant $x_0$ par son expression on a $0 \leq \frac{\hbar k_y}{eB} \leq l_x$ d'où $k_y \leq \frac{eBl_x}{\hbar}$ avec $k_y = \frac{n_y\pi}{l_y}$ on en déduit $n_y \leq \frac{eBl_x l_y}{\pi\hbar} = \frac{2eBl_x l_y}{h}$.

**10.** L'entier $n_y$ peut donc prendre $\frac{2eBl_x l_y}{h}$ valeurs ce qui correspond à $\frac{2eBl_x l_y}{h}$ niveaux d'énergie $E$. Or chaque niveau peut être occupé par deux électrons de spin différents donc il peut y avoir $g = 2\frac{2eBl_x l_y}{h}$ électrons sur un niveau d'énergie $E$.

**11.** On a $N_e = n_v b l_x l_y$.

**12.** Il n'y a qu'un niveau d'énergie possible $E$, c'est le niveau fondamental, ce niveau ne peut être occupé qu'au plus par $g$ électrons, on doit donc avoir $N_e \leq g$ soit $n_v b l_x l_y \leq 4\frac{eBl_x l_y}{h}$ soit $B \geq \frac{n_v bh}{4e} = B_{min}$.