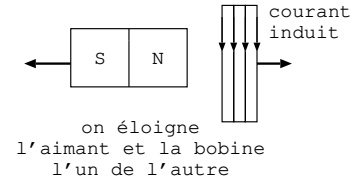
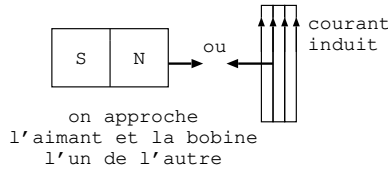
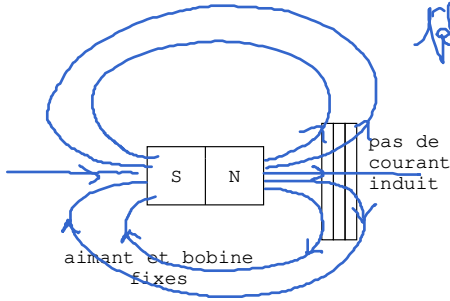


# Révisions d'induction

## Principe:

Quand on place un aimant et une bobine immobiles l'un près de l'autre, la bobine n'est le siège d'aucun courant. Quand on déplace l'aimant ou la bobine l'un par rapport à l'autre, il apparaît (pendant la durée du déplacement) dans la bobine un courant, appelé courant induit. Suivant que l'on éloigne ou que l'on rapproche l'aimant et la bobine l'un de l'autre, le sens du courant induit est modifié.

*Les lignes de champ magnétique sortent par le pôle Nord et reviennent par le pôle Sud. Le champ B est intense là où les lignes sont proches et est faible là où elles sont éloignées.*



## Explications:

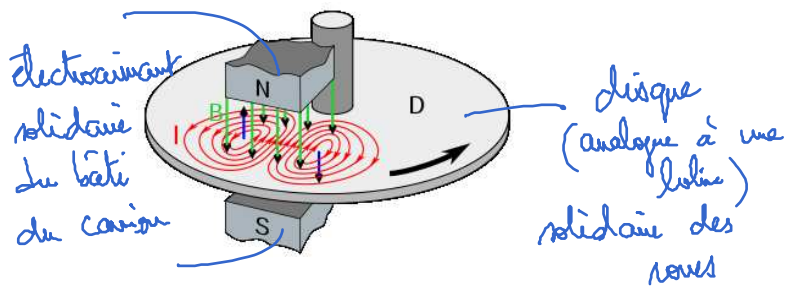
L'aimant crée un champ magnétique dans la bobine. La bobine est donc le siège d'un flux magnétique. Quand on éloigne ou qu'on approche l'aimant l'un de l'autre, le champ magnétique dans la bobine varie faisant ainsi varier le flux du champ magnétique à travers la bobine. C'est cette variation de flux qui est à l'origine du courant induit.

On observe le même phénomène si l'on remplace la bobine par un disque qui conduit le courant électrique. Les courants induits qui apparaissent dans le disque sont appelés courants de Foucault.

**Applications:** nombreuses sont les applications utilisant ce principe:

- Une dynamo de vélo est composée d'un aimant solidaire de la roue et d'une bobine fixe sur le cadre du vélo. Lorsque la roue tourne, l'aimant se rapproche ou s'éloigne de la bobine qui est alors le siège d'un courant induit, courant qui alimente une ampoule pour l'éclairage du vélo.

- Le freinage des camions s'effectue par induction. Quand le chauffeur active le système de freinage, ce système alimente un électroaimant qui crée un champ magnétique. L'électroaimant est fixe par rapport à la carrosserie du camion. Un disque conducteur, solidaire des roues, est traversé par le champ magnétique. Ce disque joue le rôle de la bobine, qui s'éloigne et se rapproche de l'aimant. Le disque est alors le siège de courants induits (courants de Foucault) qui freinent le disque et donc la roue.



Le freinage généré par les courants est d'autant plus intense que le disque et la roue tournent vite et réciproquement, plus la roue et le disque tournent lentement et moins le freinage est efficace. A l'arrêt ce dispositif de freinage ne fonctionne pas. Ce type de freinage ne peut donc être que complémentaire d'un freinage classique.

- Les plaques à induction génèrent un champ magnétique variable à l'origine de courants induits (courants de Foucault) dans le fond d'une casserole faite d'un matériau conducteur. Ces courants induits dissipent de l'énergie qui sert à chauffer la casserole et son contenu.

*copier ça soigne vite*

# I. Les lois et les prévisions des phénomènes

**1. Loi de Faraday** : l'apparition d'un courant électrique induit, montre que tout se passe comme si le circuit contenait un générateur fictif dit générateur induit dont Faraday, en 1831, a donné l'expression de la fem.

Loi de Faraday :  $\boxed{e = - \frac{d\phi}{dt}}$

la fem s'oppose aux variations du flux magnétique

avec  $\boxed{\phi = \iint_{M \in \text{surface du circuit}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M) \vec{n}(M)}$

soit  $\vec{n}$  que l'on obtient à partir de l'orientation du circuit (règle de la main droite)

Cette loi a pour origine l'équation de Maxwell Faraday :  $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

un champ  $\vec{B}$  variable crée un champ électrique

Utilisation de la loi de Faraday:

On choisit un sens d'orientation pour l'intensité  $i$  dans le circuit (ce sens est soit proposé par l'énoncé, soit proposé de façon arbitraire par vous). On déduit du sens de  $i$  le vecteur normal  $\vec{n}$  en appliquant la règle de la main droite.

On calcule le flux du champ magnétique extérieur dans le circuit :  $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \vec{n}$ .

On en déduit la fem induite par la loi de Faraday :  $e = - \frac{d\phi}{dt}$ .

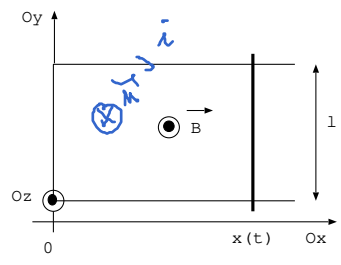
On représente le montage électrique équivalent dans lequel on place un générateur de tension de fem n'importe où dans le circuit, le sens de  $e$  doit être identique à celui choisi pour  $i$ .

Remarque: si l'on trouve  $e$  et  $i$  positifs, cela veut dire que le sens réel de  $e$  et  $i$  est le sens choisi

si l'on trouve  $e$  et  $i$  negatifs positifs, cela veut dire que le sens réel de  $e$  et  $i$  est le sens contraire au sens choisi

Un exemple:

Une barre de longueur  $l$  se déplace sur deux rails conducteurs. Le circuit est placé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ .

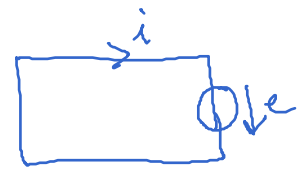


On choisit arbitrairement un sens pour  $i$  et on en déduit  $\vec{n}$  par la règle de la main droite.

$\phi = \iint B \vec{e}_z \cdot d\vec{S} (-\vec{e}_y) = -B \iint dS = -Bl x(t)$

loi de Faraday :  $e = - \frac{d\phi}{dt} = Bl v(t)$

circuit équivalent :



$e$  et  $i$  sont dans le  $\vec{n}$  sens,  $e$  se place dans la branche de votre choix

## 2. Loi de Lenz

Enoncé de la loi de Lenz:

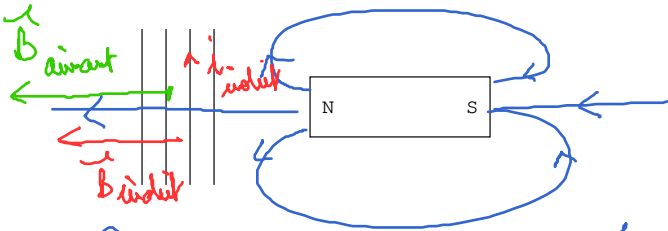
les effets de l'induction s'opposent aux causes qui leur ont donné naissance

Utilisation de la loi de Lenz:

La loi permet de prévoir de façon qualitative le sens de la fem induite et donc du courant induit, on peut procéder de deux façons différentes qui dépendent de la situation étudiée:

- Une première façon de raisonner repose sur le flux : la valeur absolue du flux est le produit du champ magnétique  $B$  extérieur avec la surface du circuit plongé dans ce champ  $B$ . Ce flux peut varier car le champ extérieur varie ou car la surface du circuit varie. Il apparaît alors un courant induit dans le circuit qui crée un champ induit qui s'oppose à la variation de flux.

Exemple : on éloigne l'aimant de la bobine:



On déduit  $i$  induit du sens de  $B$  induit par la règle de la main droite

Quand on éloigne l'aimant,  $B$  aimant à travers la bobine diminue donc  $|\phi|$  dans la bobine  $\downarrow$ . Pour compenser cette diminution du flux comme la surface  $S$  du circuit est atte il faut  $\uparrow B$  donc  $B$  induit dans le sens de  $B$  aimant.

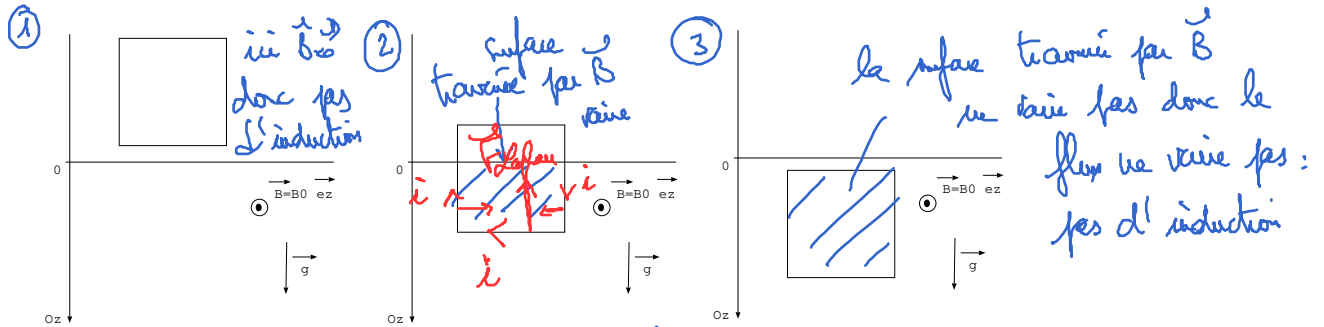
- La seconde façon de raisonner repose sur la force de Laplace:



$$\vec{F}_{Laplace} = I \vec{CD} \wedge \vec{B}$$

Le sens du courant induit est tel qu'il crée une force de Laplace qui provoque un mouvement qui s'oppose au mouvement initial du système.

Exemple : chute d'un cadre : le champ est nul dans la région  $z < 0$  et il est uniforme dans la région  $z > 0$ .



Dans le cas 2, la cause de l'induction est la chute du cadre sous l'action de son poids : la force de Laplace doit être vers le haut pour s'opposer à la chute du cadre (loi de Lenz). La force de Laplace sur le côté en haut est nulle car  $B = \vec{0}$ . Les forces de Laplace sur les côtés gauche et droit se compensent, il ne reste que la force sur le côté du bas on en déduit le sens de  $i$ .

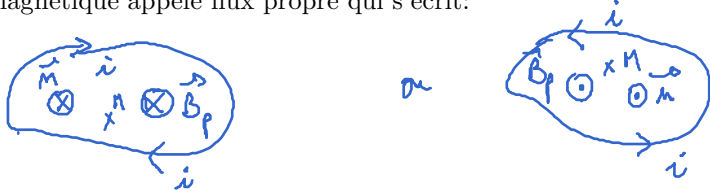
3. Remarque

Le champ magnétique qui traverse le circuit peut avoir deux origines:

- le champ  $B$  peut être créé par le courant induit : c'est le courant dans le circuit qui crée un champ dans le même circuit : champ propre
- le champ  $B$  peut être créé par un circuit ou un aimant extérieur

## II. Application à l'auto-induction

Soit un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité  $i$ . Ce circuit crée un champ magnétique dont la norme est proportionnelle à  $i$  et dont la direction et le sens sont donnés par la règle de la main droite à partir du sens de  $i$ . Ce champ se nomme le champ propre. Le champ propre génère dans le circuit un flux magnétique appelé flux propre qui s'écrit :



$$\phi_{\text{propre}} = \int_{\text{circuit}} \vec{B}_p(\vec{M}) \cdot d\vec{S}(\vec{M}) \quad \vec{B}_p \propto i$$

d'où  $\phi_{\text{propre}} = L i$   
↑  
auto-inductance

L'application de la loi de Faraday donne:  $e = - \frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$



loi de comportement d'une bobine d'inductance  $L$  en connotation génératrice car  $e$  et  $i$  de même sens

A retenir pour les exercices:

Quand l'énoncé dit que l'on tient compte de l'auto-induction, on ajoute dans le circuit électrique équivalent une bobine d'inductance  $L$  dont l'expression se déduit:

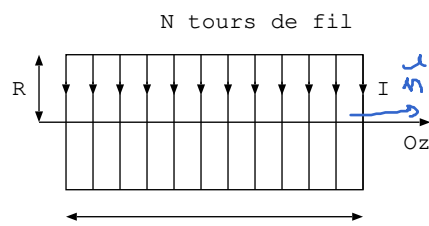
- soit  $\phi = \int \vec{B}_p(\vec{M}) \cdot d\vec{S}(\vec{M}) \quad \vec{B}_p(\vec{M}) \propto i = L i$

- soit  $U_m = \int \frac{\vec{B}_p(\vec{M})^2}{2\mu_0} dV(\vec{M}) = \frac{1}{2} L i^2$

$M \in$  surface délimitée par le circuit



Exemple : inductance d'un solénoïde de rayon  $R$ , de longueur  $l \gg R$  et comportant  $N$  tours de fil:



$\vec{B}$  orienté par  $I$  (règle main droite)

$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$        $\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 \frac{N I}{l} \vec{e}_y$

Calcul du flux de  $\vec{B}$  créé par le solénoïde à travers le solénoïde lui-même :  $\phi = \vec{B}_{\text{int}} \times \pi R^2 \times N$   
↑  
surface d'une spire      ↑  
règle de signes

d'où  $\phi = \mu_0 \frac{N I}{l} \pi R^2 N = L I$  soit  $L = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l}$

On calcule l'énergie magnétique dans le solénoïde :

$$U_m = \int \frac{B_{\text{int}}^2}{2\mu_0} dV = \left( \frac{\mu_0 N I}{l} \right)^2 \frac{1}{2\mu_0} \int dV = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2 l^2} \times \pi R^2 l = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{2 l} I^2 = \frac{1}{2} L I^2$$

d'où  $L = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l}$

### III. Application à l'induction en présence d'un champ magnétique extérieur

#### 1. Méthode

On choisit un sens d'orientation pour l'intensité  $i$  dans le circuit (ce sens est soit proposé par l'énoncé, soit proposé de façon arbitraire). On déduit du sens de  $i$  le vecteur  $\vec{n}$  en appliquant la règle de la main droite.

On calcule le flux du champ magnétique extérieur dans le circuit :  $\phi = \iint \vec{B} \cdot dS \vec{n}$ .

On en déduit la fem induite par la loi de Faraday :  $e = -\frac{d\phi}{dt}$ .

On représente le montage électrique équivalent dans lequel on met en série:

- un générateur de tension de fem égale à  $e = -\frac{d\phi}{dt}$ , la flèche de  $e$  doit être dans le même sens que  $i$ .
- une bobine d'inductance  $L$  égale à l'inductance du circuit si l'énoncé indique que l'on tient compte du phénomène d'auto-induction
- en fonction de l'énoncé on ajoute une résistance  $R$ , un condensateur de capacité  $C$ ,... et d'autres éléments éventuels...

On écrit la loi des mailles qui conduit à ce que l'on nomme *l'équation électrique*. On constate, et on écrit "l'équation électrique contient un terme mécanique" (vitesse).

Remarque: Si on trouve  $i > 0$  : cela signifie que la fem induite et le courant induit sont réellement dans le sens choisi ou si on trouve  $i < 0$  : cela signifie que la fem induite et le courant induit sont réellement dans le sens opposé au sens choisi.

En cas de translation, on calcule la résultante des forces de Laplace sur le système et on applique la RFD qui donne ce que l'on appelle *l'équation mécanique*. On écrit "l'équation mécanique contient un terme électrique".

En cas de rotation, on calcule le moment (ou le couple) des forces de Laplace, il est donné par l'énoncé  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$  où  $\vec{M} = IS \vec{n}$  est le moment dipolaire de la boucle de courant formé par le circuit. On en déduit *l'équation mécanique* en appliquant le théorème du moment cinétique. On écrit "l'équation mécanique contient un terme électrique".

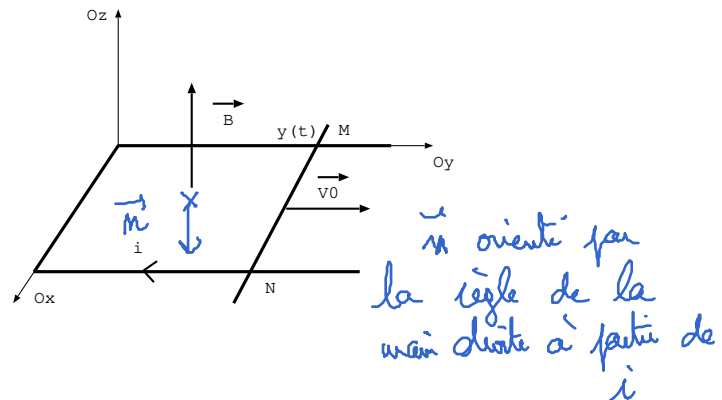
On résout le système d'équations couplées qui nous permet généralement de trouver une équation différentielle vérifiée par  $i$ ,  $v$  ou  $\omega$ .

Du point de vue énergétique, on a toujours:  $P_{laplace} + P_{fem} = 0$  avec:

- $P_{fem} = e \cdot i$  où  $e$  et  $i$  sont en convention générateur
- $P_{laplace} = \vec{F}_{laplace} \cdot \vec{v}$  (translation) ou  $\vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}$  (rotation).

#### 2. Exercice type dans le cas d'une translation

Une tige  $MN$ , de masse  $m$  et de longueur  $MN = l$ , glisse sans frottement sur deux rails conducteurs. On repère sa position par la variable  $y(t)$ . Le circuit fermé par la tige a pour résistance totale  $R$ , on néglige les phénomènes d'auto-induction. La tige est initialement animée d'une vitesse  $\vec{v}_0$ . Le circuit est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme créé par un système extérieur.



1- Prévoir le sens du courant induit et donc le signe de  $i$ .

2- Exprimer la force électromotrice induite. Représenter le circuit électrique équivalent et en déduire l'équation électrique.

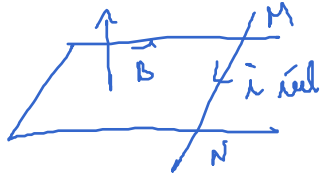
3- Déduire de la RFD appliquée à la tige, l'équation mécanique. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $v(t)$  de la tige et la résoudre pour  $v(t=0) = v_0$ .

4- Calculer l'énergie perdue par effet Joule au cours du mouvement de la tige. Calculer l'énergie cinétique perdue entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$ . Commenter.

5- On tient compte de l'auto-induction et on note  $L$  l'inductance du circuit. Représenter le circuit électrique équivalent et en déduire l'équation électrique. En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $v(t)$ .

1. La cause de l'induction est le  $\vec{u}^{\text{sl}}_B$  de la barre selon  $(Oyz)$ .

La force de Laplace exercée sur la barre doit donc être selon  $(Oyz)$  et après la loi de Biot-Savart, on en déduit le sens réel de  $i$  :  $\vec{F} = i_{\text{réel}} \vec{MN} \wedge \vec{B}$



$i_{\text{réel}}$  est dans le sens direct pour  $i$   
 donc  $i > 0$

$$\phi = \iint \vec{B}(\mu) \cdot d\vec{S}(\mu) \vec{n}(\mu) = \iint B \vec{e}_y \cdot dS(-\vec{e}_y) = -B \iint dS = -Bl y(t)$$

loi de Faraday :  $e = -\frac{d\phi}{dt} = +Bl \dot{y}$

Circuit électrique équivalent : (on ne met pas de bobine car on néglige l'auto induction)



loi des mailles :  $e = U_R = Ri = Bl \dot{y}$

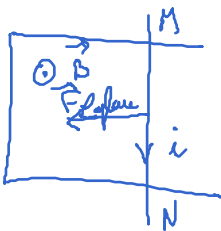
l'éq. électrique contient la terme mécanique  $\dot{y} = v$

3. La barre subit dans R galiléen :

\* son poids

\* la réaction du support

\* la force de Laplace :  $\vec{F}_{\text{Laplace}} = i \vec{MN} \wedge \vec{B} = i l \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_y = -ilB \vec{e}_y$



$\vec{P}$  et  $\vec{N}$  se compensent selon  $(Oyz)$

RFD :  $m \frac{dv}{dt} = \vec{F}_{\text{Laplace}}$

soit  $m \frac{dv}{dt} = -ilB$

l'éq. mécanique contient un terme électrique

soit  $\frac{dv}{dt} = -\frac{iBl}{m} = -\frac{B^2 l^2}{mR} v$

soit  $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$  avec  $\tau = \frac{mR}{B^2 l^2}$

solution :  $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$  et  $i = \frac{Bl \dot{y}}{R} = \frac{Bl v_0}{R} e^{-t/\tau}$

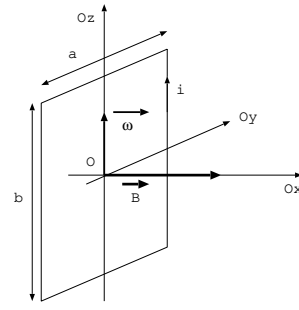
$E_{\text{Joule}} = \int_0^{\infty} R i^2(t) dt = R \int_0^{\infty} \frac{B^2 l^2 v_0^2}{R^2} e^{-2t/\tau} dt = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{2R} \tau = \frac{m v_0^2}{2}$

$\Delta E_c = E_c(t \rightarrow \infty) - E_c(t \rightarrow 0) = \frac{m v_0^2}{2}$

Toute l'énergie cinétique produite est perdue sous forme de chaleur

### 3. Exercice type dans le cas de la rotation

Un cadre rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$ , comportant  $N$  spires est disposé verticalement. Il est plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme et horizontal  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ . A l'instant initial  $t = 0$ , le cadre est contenu dans le plan  $Oyz$  perpendiculaire au champ magnétique. La figure ci-contre représente le dispositif à  $t = 0$ . Grâce à un moteur, on fait alors tourner le cadre à la vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de l'axe  $Oz$  et passant par les milieux des petits côtés.



Le circuit a une résistance totale  $R$ . Le point  $O$  est au centre du cadre. On néglige le phénomène d'auto-induction.

1- Exprimer l'intensité  $i(t)$  du courant induit dans le cadre.

2- Déterminer le moment magnétique du cadre et en déduire le couple moteur nécessaire pour faire tourner le cadre. On donne  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ . En déduire la puissance moyenne nécessaire à cette rotation.

Données numériques :  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $N = 20$  spires, fréquence de rotation du cadre  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $R = 1 \Omega$  et  $B = 0,4 \text{ T}$ .

1. Vue de dessus :

$\dot{\theta} = \omega$   
 $\theta = \omega t$   
 $(\omega = 2\pi f)$

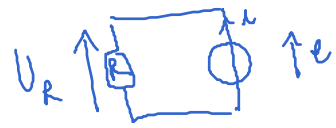
$$\Phi = \iint \vec{B}(\vec{r}) dS(\vec{r}) \vec{m}(\vec{r})$$

$$= \iint B dS \frac{\vec{m} \cdot \vec{e}_x}{\cos \theta}$$

$$= B \cos \theta \times \underbrace{ab}_{\text{surface d'une spire}} \times \underbrace{N}_{\text{N spires}}$$

loi de Faraday :  $e = -\frac{d\Phi}{dt} = +B\dot{\theta} \sin \theta ab N = B\omega \sin \theta ab N$

Circuit équivalent : (pas de bobine car on néglige l'auto-induction)



loi des mailles :  $e = U_R$  avec  $U_R = Ri$   
 soit  $i = \frac{e}{R} = \frac{B\omega}{R} \sin \theta ab N$

2. Moment magnétique :  $d\vec{m} = i S N \vec{m} = iab N \vec{m}$

Moment des forces de Laplace :  $\vec{\Gamma} = d\vec{m} \wedge \vec{B} = iab N \left[ \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \right] \wedge B \vec{e}_x$   
 $= -iab N \sin \theta \vec{e}_y$

car la vitesse de rotation est cette

le couple s'oppose à la rotation du cadre

TMC :  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\vec{\Gamma}}_{\text{couple de Laplace}} + \underbrace{\vec{\Gamma}_{\text{m}} \vec{e}_y}_{\text{couple moteur}} + \vec{0}$

soit  $\Gamma_m = -\Gamma = iab N \sin \theta$

$\Gamma_m = \frac{B\omega}{R} \sin^2 \theta a^2 b^2 N^2$

$\langle \Gamma_m \rangle = \frac{B\omega}{R} \langle \sin^2(\omega t) \rangle a^2 b^2 N^2 = \frac{B\omega}{2R} a^2 b^2 N^2$

## IV. Inductance mutuelle

Soit un circuit  $C_1$  parcouru par un courant d'intensité  $I_1$ , ce circuit crée dans l'espace un champ magnétique  $\vec{B}_1$  proportionnel à  $I_1$ .

Soit un circuit  $C_2$  parcouru par un courant d'intensité  $I_2$ , ce circuit crée dans l'espace un champ magnétique  $\vec{B}_2$  proportionnel à  $I_2$ .

On peut définir plusieurs flux du champ magnétique:

- Le flux  $\phi_1$  de  $\vec{B}_1$  à travers  $C_1$  s'appelle le flux propre, il s'écrit

- Le flux  $\phi_2$  de  $\vec{B}_2$  à travers  $C_2$  s'appelle le flux propre, il s'écrit

- Le flux  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  de  $\vec{B}_1$  à travers  $C_2$ , il s'écrit

- Le flux  $\phi_{2 \rightarrow 1}$  de  $\vec{B}_2$  à travers  $C_1$ , il s'écrit

$M_{1-2} = M_{2-1} = M$  s'appelle le coefficient d'inductance mutuelle, son signe dépend de l'orientation des courants dans les circuits ( $M$  peut être négative alors que  $L_1$  et  $L_2$  sont toujours positives).

Unité:

La loi de Lenz s'écrit:

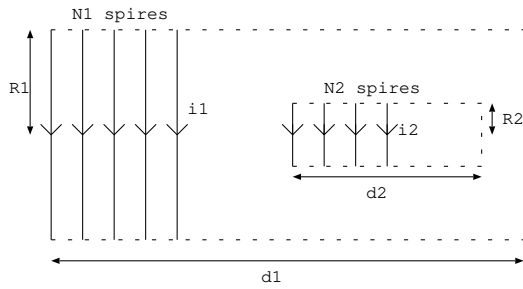
pour le circuit  $C_1$ :

pour le circuit  $C_2$ :

Le circuit électrique équivalent est:



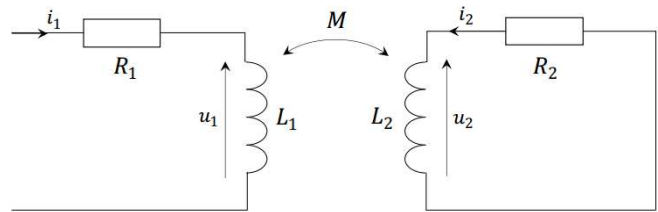
**Exercice:** calculer l'inductance mutuelle entre deux solénoïdes (infinis)



Que devient  $M$  si l'on change le sens du courant  $i_1$ ?

Que devient  $M$  si l'on change le sens du courant  $i_2$ ?

**Exercice:** On donne le circuit modélisant l'interaction entre le solénoïde et le plasma. Le solénoïde, d'inductance propre  $L_1$  et de résistance  $R_1$ , est parcouru entre  $t = 0$  et  $t = t_1$  par le courant  $i_1(t) = I_0(1 - \frac{t}{t_1})$  avec  $I_0$  et  $t_1$  des constantes. La boucle de courant représentant le plasma a pour résistance  $R_2$  et pour inductance propre  $L_2$ , elle est parcourue par le courant  $i_2(t)$ . On a  $i_2(t < 0) = 0$ .  $M$  est l'inductance mutuelle entre les deux circuits.

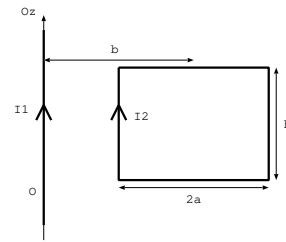


Montrer que  $i_2(t)$  vérifie l'équation différentielle:  $\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} = \frac{I_0}{\tau_1}$ . avec  $\tau_1$  et  $\tau_2$  qui seront exprimés en fonction de  $L_2$ ,  $R_2$ ,  $M$  et  $t_1$ .

En déduire  $i_2(t)$ . En supposant  $t \ll \tau_2$ , simplifier cette expression par un développement limité au premier ordre en  $t/\tau_2$ .

Exprimer l'énergie reçue par  $R_2$  entre  $t = 0$  et  $t = t_1$  en fonction de  $R_2$ ,  $L_2$ ,  $M$ ,  $I_0$  et de  $t_1$  supposant que  $t_1 \ll \tau_2$ . Quel est l'effet de cette énergie sur le plasma ?

**Exercice :** Soit un fil infini parcouru par un courant d'intensité  $I_1$  et une bobine plate de  $N$  spires rectangulaires de côtés longueur  $h$  (côté parallèle au fil) et  $2a$  (côté perpendiculaire au fil) parcourue par un courant d'intensité  $I_2$ . On note  $b$  la distance moyenne entre le fil et la bobine.



1- Le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant d'intensité  $I$  en coordonnées cylindriques s'écrit  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ . Exprimer le flux du champ créé par le fil à travers la bobine et en déduire la mutuelle inductance  $M$ .

2- Le fil est alimenté par une source de tension qui délivre l'intensité  $I_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . La bobine n'est pas alimentée, elle a pour résistance  $R$ . On néglige le phénomène d'auto induction. Représenter le schéma équivalent de la bobine et déterminer  $I_2(t)$  dans la bobine.