Correction TD induction

I. Circuit avec un condensateur

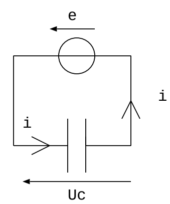
1. La tige tombe sous l'action de son poids. Il apparaît dans le circuit un courant induit de telle sorte que la force de Laplace qui s'exerce sur la barre PQ va s'opposer à la force poids pour empêcher la tige de tomber (loi de Lenz: les effets s'opposent aux causes qui leur ont donnée naissance).

La force de Laplace dans la tige QP s'écrit $\overrightarrow{F} = i\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{B} = -il\overrightarrow{e_x} \wedge B\overrightarrow{e_y} = -ilB\overrightarrow{e_z}$: on a donc $i > 0$ pour que cette force soit vers le haut.

2. On applique la loi de Faraday: $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = \iint \overrightarrow{B}.dS\overrightarrow{n}$ ici $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_y}$ (orienté par i à partir de la règle de la main droite).

On a donc $\phi = \iint B\overrightarrow{e_y} dS\overrightarrow{e_y} = B \iint dS = B(a-z)l$ d'où $e = Bl\dot{z}$.

Le circuit équivalent comprend le générateur de fem e (dans le sens de i) et ne comprend pas de bobine car on néglige l'auto induction. Soit d'après la loi des mailles: $i = C\dfrac{dU_c}{dt} = C\dfrac{de}{dt} = CBl\ddot{z}$: cette équation électrique contient un terme mécanique $\dot{z}$.



3. On applique la RFD à la barre sui subit son poids et la force de Laplace: $m\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m\overrightarrow{g} - ilB\overrightarrow{e_z}$ soit en projection sur Oz: $m\ddot{z} = mg - ilB$: cette équation mécanique contient un terme électrique i.

On combine les équations électrique et mécanique: $m\ddot{z} = mg - B^2l^2C\ddot{z}$ soit $\ddot{z} = \dfrac{g}{1+\frac{B^2l^2C}{m}} < g$: ainsi en présence de l'induction le mouvement est uniformément accéléré mais l'accélération est inférieure à g qui correspond à une chute libre: l'induction a bien joué le rôle de freinage.

4. On a donc par intégration par rapport au temps: $\dot{z} = v = \dfrac{g}{1+\frac{B^2l^2C}{m}}t$ et la tension aux bornes du condensateur est $U_c = e = Bl\dot{z} = \frac{g}{1+\frac{B^2l^2C}{m}}t$: elle augmente au cours du temps, le condensateur sera abimé car la tension à ses bornes va dépasser la tension de claquage.

II. Rails inclinés

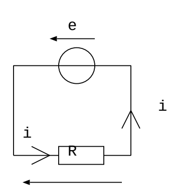
1. La tige descend sur le plan incliné sous l'action de son poids. Il apparaît dans le circuit un courant induit de telle sorte que la force de Laplace qui s'exerce sur la tige va s'opposer à la force poids pour empêcher la tige de tomber (loi de Lenz: les effets s'opposent aux causes qui leur ont donnée naissance).

La force de Laplace sera selon $-Ox$ sur la tige pour un courant dans la tige dans le sens du courant i choisi dans l'exercice. Donc le courant i est positif.

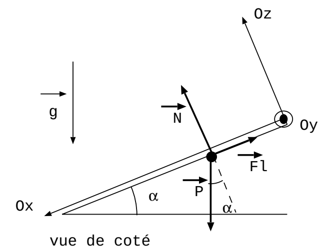
2. On applique la loi de Faraday: $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = \iint \overrightarrow{B}.dS\overrightarrow{n}$ ici $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{e_z}$ (orienté par i à partir de la règle de la main droite).

On a donc $\phi = \iint B\overrightarrow{e_z}(-dS\overrightarrow{e_z}) = -B \iint dS = -Bax(t)$ d'où $e = +Ba\dot{x} = Bav$.

Le circuit équivalent comprend le générateur de fem e (dans le sens de i) et ne comprend pas de bobine car on néglige l'auto induction. Soit d'après la loi des mailles: $U_r = e = Ri = Bav$: cette équation électrique contient un terme mécanique v.



3. On applique la RFD à la tige qui subit son poids, la réaction du support et la force de Laplace $\overrightarrow{F_L} = i(-a\overrightarrow{e_y})\Lambda B\overrightarrow{e_z} = -iaB\overrightarrow{e_z}$. $m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{N} - iaB\overrightarrow{e_x}$ ($\overrightarrow{N}$ est la réaction selon Oz; elle est perpendiculaire au support car il n'y a pas de frottement) soit en projection sur Oz: $m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - iaB$: cette équation mécanique contient un terme électrique i.



On combine les équations électrique et mécanique: $m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - \frac{B^2a^2}{R}v$ soit à résoudre $\frac{dv}{dt} + \frac{B^2a^2}{mR}v = g\sin\alpha$. On pose $\tau = \frac{mR}{B^2a^2}$.

Solution particulière: $v = g\tau\sin\alpha$

Solution général: $v = Ae^{-t/\tau}$

D'où $v = Ae^{-t/\tau} + g\tau\sin\alpha$ avec d'après les CI: $v(t=0) = 0 = A + g\tau\sin\alpha$ soit $v = (1 - e^{-t/\tau})g\tau\sin\alpha$.

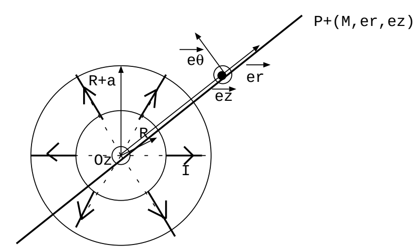
La tige accélère sous l'action de son poids puis elle est freinée par la force de Laplace. En régime permanent, l'action du poids et de la force de Laplace se compense, la tige a un mouvement rectiligne uniforme.

On primitive $v(t)$ pour obtenir $x(t)$ soit: $x(t) = g\tau\sin\alpha t + g\tau^2\sin\alpha e^{-t/\tau} + C$, on trouve C grâce aux CI.

III. **Tore**

1. Il y a invariance par rotation donc le champ magnétique ne dépend pas de θ.

M appartient au plan de symétrie $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ donc le champ magnétique en M est perpendiculaire à ce plan, il est selon $\overrightarrow{e_\theta}$. Les lignes de champ sont des cercles centrés sur Oz. On a $\overrightarrow{B}(M) = B(r,z)\overrightarrow{e_\theta}$.



On prend pour contour d'Ampère un cercle de rayon $r = HM$, centré sur Oz et orienté par $\overrightarrow{e_z}$. On a $C = \oint \overrightarrow{B}d\overrightarrow{OM} = \oint B(r,z)dl = B(r,z)\oint dl = 2\pi rB(r,z)$.

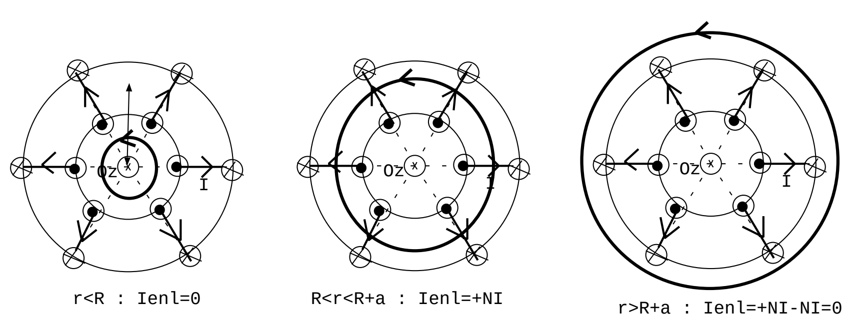
On applique le théorème d'Ampère: $C = \mu_0 I_{enlaces}$.

Pour $z < 0$ et $z > a$: il n'y a pas de courant enlacés soit $B = 0$.

Pour $0 < z < a$ et $r < R$: il n'y a pas de courant enlacés soit $B = 0$.

Pour $0 < z < a$ et $r > R + a$: $I_{enlaces} = +NI - NI = 0$ donc $B = 0$.

Pour $0 < z < a$ et $R < r < R + a$: $I_{enlaces} = +NI$ soit $C = 2\pi rB(r,z) = \mu_0 NI$ et $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$.



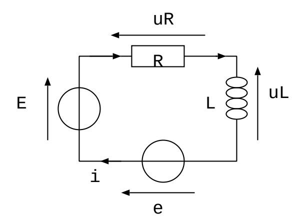
2. Une spire carrée est orientée par la règle de la main droite selon i, on obtient $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_\theta}$. Le flux du champ magnétique à travers une spire carrée est $\phi_1 = \iint \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}dS\overrightarrow{e_\theta} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}\iint \frac{dS}{r}$. Un point de le spire est repéré par r et z donc $dS = drdz$ soit $\phi_1 = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}\int_R^{R+a}\frac{dr}{r}\int_0^a dz = \frac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln(\frac{R+a}{R})$. On en déduit le flux à travers tout le tore soit à travers N spires: $\phi = N\phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi}\ln(\frac{R+a}{R}) = LI$ d'où $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln(\frac{R+a}{R})$: L désigne l'inductance propre du tore.

3. L'énergie magnétique dans tout le volume du tore est: $U_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0}d\tau = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2(2\pi)^2}\iiint \frac{1}{r^2}drrd\theta dz = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2(2\pi)^2}\int_R^{R+a}\frac{dr}{r}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a dz = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2(2\pi)^2}\ln(\frac{R+a}{R})2\pi a = \frac{\mu_0 N^2 a I^2}{4\pi}\ln(\frac{R+a}{R})$. L'énergie magnétique stockée dans une bobine est $U_m = \frac{LI^2}{2}$ d'où $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln(\frac{R+a}{R})$.

IV. **Présence d'auto induction**

1. Dans ce montage, il y a une pile de fem E. Cette pile crée un courant dans le circuit et ainsi la tige parcourue par un courant i et placée dans un champ magnétique, subit la force de Laplace. Cette force met la tige en mouvement et ensuite il apparaît un courant induit pour lutter contre le mouvement de la tige. On trouve le vecteur $\overrightarrow{n}$ par la règle de la main droite à partir de i soit $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{e_z}$. On en déduit le flux du champ magnétique à travers le circuit de surface $lx(t)$ soit $\phi = \iint B\overrightarrow{e_z}dS(-\overrightarrow{e_z}) = -BS = -Blx(t)$. On applique la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt} = Bl\dot{x} = Blv$.

Dans le circuit équivalent, il y a une bobine d'inductance L car on tient compte de l'auto-induction et il y a le générateur fictif de fem e (avec e dans le sens de i).



Loi des mailles: $e + E = u_R + u_L$ avec $u_R = Ri$ et $u_L = L\frac{di}{dt}$. d'où l'équation: $Ri + L\frac{di}{dt} = -Blv + E$: l'équation électrique contient le terme mécanique v.

2. La tige subit son poids et la réaction du support (qui ici se compensent car ces forces sont dans la direction perpendiculaire au mouvement) et la force de Laplace $\overrightarrow{F_L} = i(-l\overrightarrow{e_y})\Lambda B\overrightarrow{e_z} = -ilB\overrightarrow{e_x}$.

La RFD appliquée à la tige s'écrit: $m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -ilB\overrightarrow{e_x}$ soit en projection sur Ox: $m\frac{dv}{dt} = -ilB$: l'équation mécanique contient le terme électrique i.

3. On déduit des équations précédentes, l'équation différentielle vérifiée par v: $\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{B^2l^2}{mL}v = -\frac{BlE}{m}$. D'où par identification avec l'énoncé, $\tau = \frac{2L}{R}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{B^2l^2}{mL}}$ et $v_1 = -\frac{E}{Bl}$.

Pour résoudre l'équation différentielle, on écrit l'équation caractéristique: $r^2 + \frac{2r}{\tau} + \omega_0^2 = 0$.

On écrit le discriminent $\Delta = (\frac{2}{\tau})^2 - 4\omega_0^2$. On a un régime pseudo-périodique pour $\Delta < 0$, ce qui donne les solutions $r_\pm = \frac{-1}{\tau} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. La partie réelle des racines se trouve dans le terme exponentiel et la partie imaginaire se trouve dans les termes oscillants, on pose $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. On a $v(t) = e^{-t/\tau}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$.

V. **Ligne haute tension**

1. On a $i(t) = I_e\sqrt{2}\cos(2\pi f t)$ (la valeur efficace est égale à l'amplitude divisée par $\sqrt{2}$ pour une grandeur sinusoidale).

L'énoncé nous dit que le champ magnétique créé par ce courant variable est comme celui créé par un courant continu. Cela sous entend que l'on est dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, dans l'équation de Maxwell Ampère, on néglige le courant de déplacement devant le courant de conduction donc le théorème d'Ampère s'écrit $C = \oint \overrightarrow{B}d\overrightarrow{OM} = \mu_0 I_{enlaces}$.

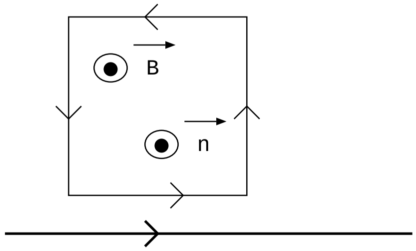
Il y a invariance par rotation autour de Oz et par translation selon Oz donc le champ magnétique ne dépend que de r.

M appartient au plan de symétrie $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ donc le champ magnétique en M est perpendiculaire à ce plan, il est selon $\overrightarrow{e_\theta}$. Les lignes de champ sont des cercles centrés sur Oz. On a $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\overrightarrow{e_\theta}$.

On prend pour contour d'Ampère un cercle de rayon $r = HM$, centré sur Oz et orienté par $\overrightarrow{e_z}$. On a $C = \oint \overrightarrow{B} d\overrightarrow{OM} = \oint B(r)dl = B(r) \oint dl = 2\pi r B(r)$.

On applique le théorème d'Ampère $C = \oint \overrightarrow{B} d\overrightarrow{OM} = \mu_0 I_{enlaces}$ soit ici $I_{enlaces} = i(t)$ donc $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$.

2.



On calcule le flux de ce champ magnétique à travers une spire carrée: $\phi_1 = \iint \overrightarrow{B}.dS\overrightarrow{n} = \iint B.dS = \dfrac{\mu_0 i(t)}{2\pi} \int_d^{d+a} \dfrac{dr}{r} \int_0^a dz = \dfrac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln(\dfrac{d+a}{d})$ (en effet le point M sur la spire carrée est repéré par r et z donc $dS = dr.dz$). Le flux total à travers N spires est donc $\phi = N\phi_1 = \dfrac{\mu_0 N i(t) a}{2\pi} \ln(\dfrac{d+a}{d}) = \dfrac{\mu_0 N I_e \sqrt{2}\cos(2\pi f t) a}{2\pi} \ln(\dfrac{d+a}{d})$.

On en déduit la fem induite par la loi de Faraday: $e(t) = -\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{2\pi f \mu_0 N I_e \sqrt{2}\sin(2\pi f t) a}{2\pi} \ln(\dfrac{d+a}{d})$. Dans le circuit électrique équivalent il n'y a que l'ampoule et la pile fictive de fem e. Donc la tension efficace aux bornes de l'ampoule est égale à la tension efficace de la fem induite soit $U_e = \mu_0 N I_e a f \ln(\dfrac{d+a}{d})$. On en déduit le nombre de spires par: $N = \dfrac{U_e}{\mu_0 I_e a f \ln(\frac{d+a}{d})} = 28,7$.