I. Correction Pb II marche au hasard

1.

1.a. On a $p(x,t+\tau)=\dfrac{1}{2}p(x-l,t)+\dfrac{1}{2}p(x+l,t)$ (cela traduit que la particule qui se trouve en x à l'instant $t+\tau$ se trouvait soit en $x-l$ à l'instant t soit en $x+l$ à l'instant t avec une probabilité 1/2 pour chaque cas).

1.b. DL à l'ordre 1 en τ de: $p(x,t+\tau)=p(x,t)+\tau\dfrac{\partial p}{\partial t}(x,t)$

DL à l'ordre 2 en l de: $p(x+l,t)=p(x,t)+l\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,t)+\dfrac{l^2}{2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)$

$p(x-l,t)=p(x,t)-l\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,t)+\dfrac{l^2}{2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)$

On a donc $p(x+l,t)+p(x-l,t)=2p(x,t)+l^2\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)$.

1.c. En remplaçant dans l'équation de probabilité $p(x,t)+\tau\dfrac{\partial p}{\partial t}(x,t)=p(x,t)+\dfrac{l^2}{2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)$ ou encore $\dfrac{\partial p}{\partial t}=\dfrac{l^2}{2\tau}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$: on trouve une équation de diffusion où $D=\frac{l^2}{2\tau}$.

2.

2.a. On lit $\tau=1\ s$ et $l=1$.

2.b. La fonction position renvoie une liste contenant N+1 termes. La ligne 6 sert à créer la liste avec son premier terme qui est la position initiale de la particule et la boucle for ajoute N termes à la liste.

poslist[i] désigne la position de la particule à l'instant $t_i=i\tau=i$

poslist[i]+random.choice([+l,-l]) désigne la position de la particule à l'instant $t_i+\tau=i+1$, la nouvelle position est obtenue par tirage au sort, on a $x(t_{i+1})=x(t_i)\pm l$.

ligne 6 : poslist=[0] # x(t=0)=0

ligne 10: N=10

Courbe 1: position(10)=[0,-1,0,-1,-2,-1,-2,-1,-2,-3,-4]

Courbe 2: position(10)=[0,1,0,-1,0,1,0,1,0,1,0]

Courbe 3: position(10)=[0,1,2,1,2,1,0,1,2,3,4]

3.

3.a. Le tableau concerne $N_p=3$ particules (3 colonnes) sur l'intervalle de temps $0,4\tau$ (5 lignes $N+1=5$). On lit $x_0(t=3\tau)=T[3,0]=1$ (1ère colonne et 4ième ligne), $x_1(t=2\tau)=T[2,1]=0$ (2ième colonne et 3ième ligne) et $x_2(t=\tau)=T[1,2]=-1$ (3ième colonne et 2ième ligne).

3.b. ligne 20: T[:,i]=position(N) # T[:,i] désigne la colonne j, soit le mouvement de la particule d'indice j à chaque instante, c'est la fonction position(N) qui donne ces valeurs.

3.c. l désigne une liste. La boucle for de la fonction f fait la somme des carrés des termes de la liste et la fonction f renvoie cette somme divisée par le nombre de termes ainsi la fonction f renvoie la valeur moyenne des carrés de l.

3.d. T[i,:] désigne la ligne i du tableau T soit les valeurs des positions des N_p particules à l'instant $t_i=i\tau$. Ainsi f(T[i,:]) désigne la valeur moyenne des carrés des positions des particules à l'instant t_i soit $f(T[i,:])=<x^2(t_i)>$. La liste l1 contient donc les valeurs moyennes des carrés des positions des particules aux instants 0, τ, 2τ... Soit $l1=[<x^2(t=0)>,<x^2(t=\tau)>,<x^2(t=2\tau)>,...,<x^2(t=N\tau)>]$.

D'après la question 1, $D=\dfrac{l}{2\tau}=\dfrac{1}{2}$ avec les valeurs numériques de $l=1$ et $\tau=1\ s$ choisies ici.

La ligne 30 permet de tracer la courbe $<x^2(t)>$ en fonction de t.

La ligne 31 permet de tracer la droite d'équation $y=aDt$ (la pente de la droite est égale à 1, or $D=0.5$ donc $a=2$).

On remarque que plus le nombre de particules est grand et plus la courbe $<x^2(t)>$ se confond avec la droite $y=2Dt$. Les résultats obtenus viennent d'une étude probabiliste or les probabilités sont d'autant plus exactes que les nombres manipulés sont grands. C'est cohérent avec les courbes observées.