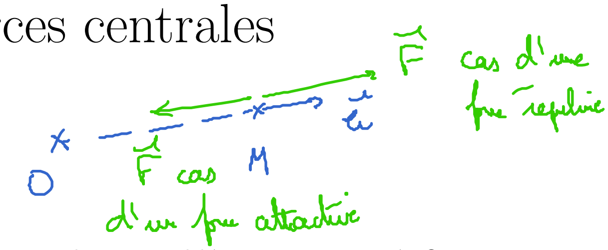
Révisions forces centrales

I. Champ de force centrale

Les forces centrales sont de la forme $\overrightarrow{F} = F(r)\overrightarrow{e_r}$.



forces conservative : $F = -dE_p/dr$

1. Conservation du moment cinétique

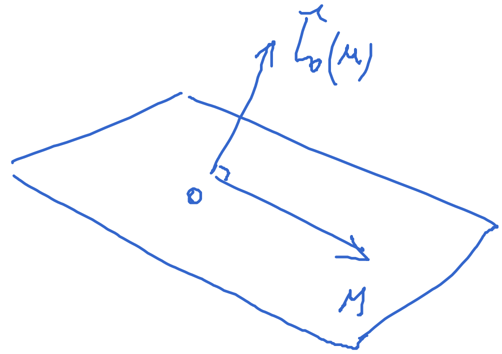
On applique le théorème du moment cinétique au point M dans R galiléen par rapport à O:

$$\frac{d\vec L_O(M)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec F = \vec 0$$ car $\vec{OM}$ et $\vec F$ sont colinéaires

donc le moment cinétique est constant

Conséquence 1: le mouvement est plan

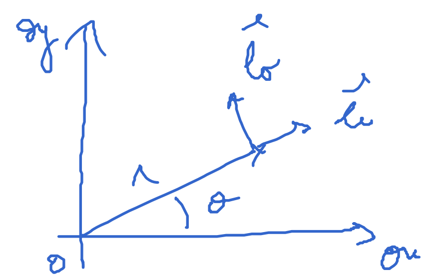
Par définition : $\vec L_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec v(M/R)$ est un vecteur $\perp$ à $\vec{OM}$ donc à tout moment $\vec{OM}$ est perpendiculaire au vecteur constant $\vec L_O(M)$ donc M se déplace dans le plan passant par O et $\perp$ à $\vec L_O(M)$



On peut donc travailler dans la suite en coordonnées polaires.

Conséquence 2: la loi des aires

Le moment cinétique de M s'écrit:

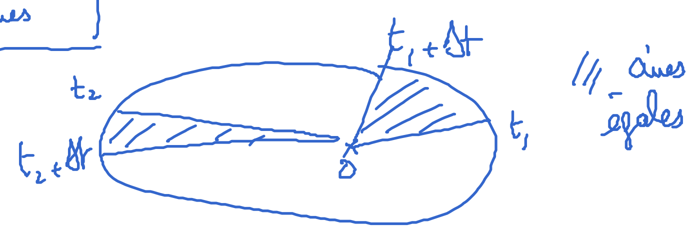


$$\vec L_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec v(M/R) = r\vec e_r \wedge m(\dot r \vec e_r + r\dot\theta \vec e_\theta) = m r^2 \dot\theta \vec e_z$$

$$\boxed{C = r^2\dot\theta = \text{cste des aires} = L_O/m}$$

2ème loi de Kepler:

le rayon vecteur $\vec{OM}$ balaie des aires égales en des temps égaux. Plus M est proche de O et plus il va vite



2. Conservation de l'énergie mécanique

le système est conservatif donc $E_m = $ cste

Expression de la vitesse: $\vec v = \dot r \vec e_r + r\dot\theta \vec e_\theta = \dot r \vec e_r + \frac{C}{r}\vec e_\theta$

Expression de l'énergie mécanique: $E_m = \frac{m v^2}{2} + E_p(r) = \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$

fonction de r

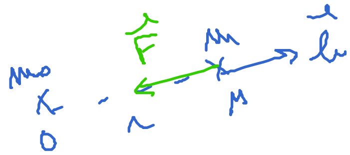
Expression de l'énergie potentielle effective ou efficace:

$$E_m = \underbrace{\frac{m\dot r^2}{2}}_{E_c \text{ radiale} \geq 0} + E_{peff}(r) \quad \text{avec} \quad E_{peff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

le mvt n'est possible que pour $\boxed{E \geq E_{peff}}$

II. **Exemples: les forces Newtoniennes**

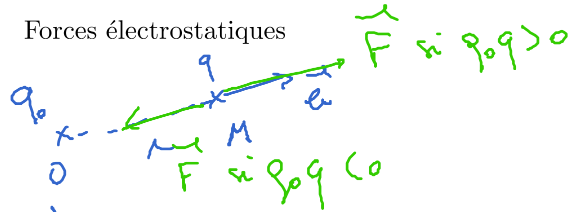
Forces gravitationnelles



$$\vec F = -\mathcal{G}\frac{m m_0}{r^2}\vec{e_r}$$

$$E_p = -\mathcal{G}\frac{m m_0}{r}$$

Forces électrostatiques



$$\vec F = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$$

$$E_p = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Les forces Newtoniennes se mettent sous la forme: $\vec F = \frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ avec $K = -\mathcal{G} m_0 m$: gravitation

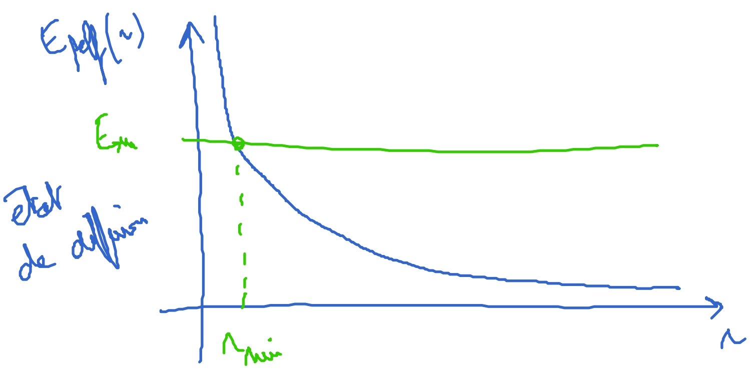
ou $K = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}$: électrostatique

1. **Cas répulsif**

Expression de l'énergie potentielle effective: $E_{peff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r} > 0$

$\vec F = \frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ avec $\underline{\underline{K > 0}}$

Interprétation graphique: $E_m = cste$ et $E_m = \underbrace{\frac{m\dot r^2}{2}}_{\geq 0} + E_{peff}(r)$ le mvt n'est possible que pour $E_m \geq E_{peff}$



M ne peut se trouver que pour $r \geq r_{min}$: mvt hyperbolique

r_{min} défini par $E_m = E_{peff} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r}$ à résoudre

à l'infini : $E_p \to 0$ $\quad E_m = \frac{m v_\infty^2}{2} \Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{2E_m}{m}}$

2. **Cas attractif**

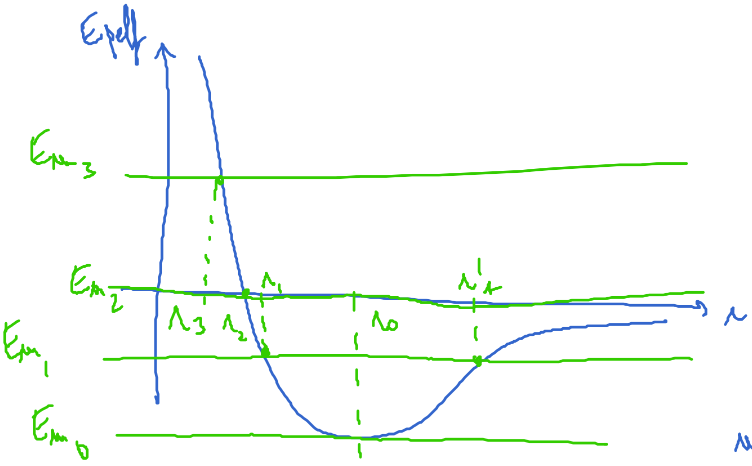
Expression de l'énergie potentielle effective: $E_{peff}(r) = \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{>0} + \underbrace{\frac{K}{r}}_{<0}$

$\vec F = \frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ avec $K < 0$

Minimum de l'énergie potentielle effective:

$$\frac{dE_{peff}}{dr} = -\frac{L^2}{2mr^3} - \frac{K}{r^2} = 0 \quad \text{pour} \quad r_0 = -\frac{L^2}{2mK} > 0$$

Interprétation graphique: $E_m = cte$ $\qquad E_m = \underbrace{\frac{m\dot{r}^2}{2}}_{\geq 0} + E_{peff}(r)$ le mvt n'est possible que pour $E_m \geq E_{peff}$



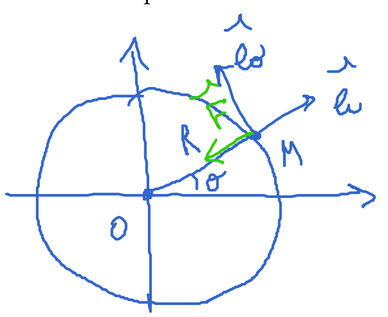
mvt hyperbolique : $r > r_3$
mvt parabolique : $r > r_2$
état de diffusion

mvt elliptique : $r_1 < r < r_1'$
mvt circulaire : $r = r_0$
état lié

III. Application à la mécanique céleste

1. Mouvement circulaire

Expression de la vitesse:



$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -G\frac{m_0 m}{R^2}\vec{e}_r$$

sur $\vec{e}_\theta$: $\frac{dv}{dt} = 0$: mvt uniforme

$$m\vec{e}_r : \cancel{m}\frac{v^2}{R} = G\frac{\cancel{m}m_0}{R^2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{Gm_0}{R}}}$$

Expression de la période:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{Gm_0}}$$

3ème loi de Kepler : $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_0}$

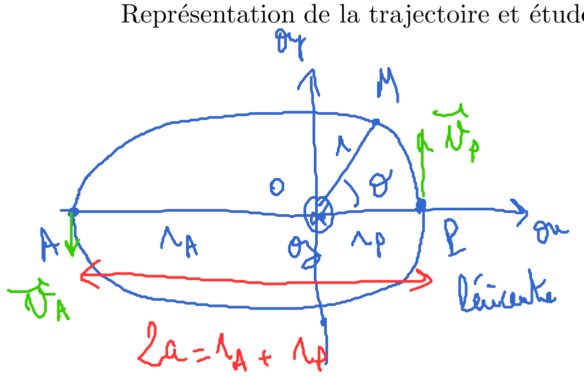
Expression de l'énergie mécanique:

$$E_m = m\frac{v^2}{2} - G\frac{m_0 m}{R} = \frac{m\,Gm_0}{2R} - G\frac{m_0 m}{R} = -G\frac{m m_0}{2R}$$

2. Mouvement elliptique

Exploitation des résultats concernant l'orbite circulaire: les expressions de T et de Em de l'orbite circulaire sont valables pour l'ellipse à condition de remplacer R par a (le demi-grand axe de l'ellipse) : $E_m = -G\frac{m m_0}{2a}$ et $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_0}$

Représentation de la trajectoire et étude de deux points particuliers:



$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_O(A) = \vec{OA} \wedge m\vec{v}_A = m\, r_A v_A\, \vec{e}_z \\ \vec{L}_O(P) = \vec{OP} \wedge m\vec{v}_P = m\, r_P v_P\, \vec{e}_z\end{array}\right\} \Rightarrow r_A v_A = r_P v_P$$

$$E_m = \frac{m v_A^2}{2} - G\frac{m m_O}{r_A} = \frac{m v_P^2}{2} - G\frac{m m_O}{r_P}$$

Rq: $E_m = -G\frac{m m_O}{2a} = \frac{m v^2}{2} - G\frac{m m_O}{r}$ sert à calculer la vitesse de M en tout point de l'ellipse : $v^2 = \sqrt{2 G m_O \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}$

3. Des applications en astronautique

Orbite géostationnaire: l'orbite géostationnaire est une orbite circulaire dans le plan équatorial et géosynchrone (période orbitale égale au jour sidéral terrestre).

Son altitude se déduit de la 3ème loi de Kepler :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (R_T + h)^3}{G M_T} \quad \text{soit} \quad h = \left(G\frac{M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T = 36000 \text{ km}$$

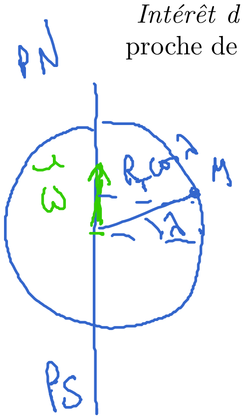
avec $T = 24 \times 3600$ s

Vitesse de libération: c'est la vitesse minimale à communiquer à un corps pour qu'il puisse quitter définitivement la surface d'un astre tel que la Terre.

L'énergie la plus faible pour un état de diffusion est : $E_m = 0$

$$E_m = 0 = \frac{m v^2}{2} - G\frac{m m_O}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 G m_O}{r}} \quad \text{avec } r = R_T$$

Intérêt d'un lancement depuis l'équateur: pourquoi est-il intéressant de lancer les fusées depuis une base proche de l'équateur (exemple : Kourou en Guyane Française à la latitude $\lambda = 5^0$) ?



La Terre tourne sur elle, à la vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T_{Terre}} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7{,}3.10^{-5}$ rad/s

Les objets posés sur la Terre ont donc un mvt circulaire dans le réf. géocentrique de rayon $R_T \cos\lambda$ donc de vitesse $v = \omega R_T \cos\lambda$

Les objets possèdent une E_c égale à $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 R_T^2 \cos^2\lambda$, elle est maximale pour $\lambda \simeq 0$: donc la fusée a une E_c liée au mvt de rotation propre de la Terre qui fait qu'on a besoin de − d'énergie pour l'envoyer