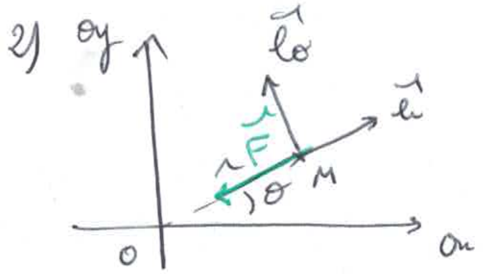
Centrale PC 2022

1) $[\mathcal{G}] = \left[\frac{F r^2}{m_1 m_2}\right] = \frac{kg\, m s^{-2} m^2}{kg^2} = kg^{-1} m^3 s^{-2}$

2) 

L'objet de masse m subit l'attraction du soleil :

$$\vec F = -\mathcal{G}\frac{m M_S}{r^2}\vec{e_r}$$

On applique le TMC à la masse m par rapport à O :

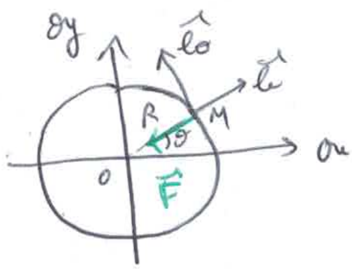
$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{OM}\wedge\vec F = \vec 0$$ la force $\vec F$ est incapable de faire tourner M autour de O

d'où $\boxed{\vec{L_O} \text{ est une constante du mvt}}$

3) Par définition $\vec{L_O} = \vec{OM}\wedge m\vec v$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{OM}$ et $\vec v(M)$ donc $\vec{OM}$ et $\vec v(M)_R$ sont perpendiculaires à un vecteur constant donc M a un mvt plan dans le plan passant par O et perpendiculaire à $\vec{L_O}$.

$$\vec{L_O}(M) = r\vec{e_r}\wedge(m\dot r\vec{e_r} + m r\dot\theta\vec{e_\theta}) = m r^2\dot\theta\vec{e_z}$$

$\|\vec{L_O}\| = L_O = mC$ soit $\boxed{C = \frac{L_O}{m}}$: c'est la constante des aires

4) 

RFD appliquée à la masse m :

$$m\vec a(M)_R = -\mathcal{G}\frac{m M_S}{R^2}\vec{e_r}$$

avec $\vec a(M)_R = -\frac{v^2}{R}\vec{e_r} + \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta}$

en projection sur $\vec{e_\theta}$: $\frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow$ mvt uniforme

sur $\vec{e_r}$: $-\frac{v^2}{R} = -\mathcal{G}\frac{M_S}{R^2}$ soit $\boxed{v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}}}$

AN : $v_T = 2{,}98.10^4\ m s^{-1}$

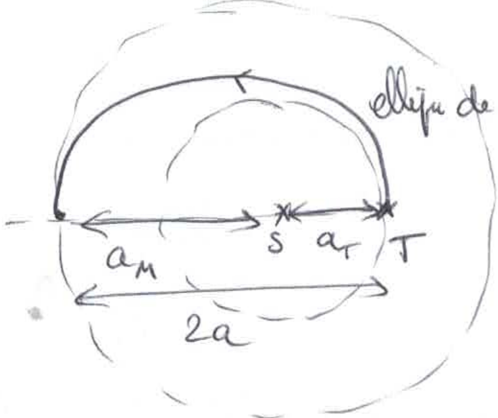
$v_M = 2{,}42.10^4\ m s^{-1}$

5) $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \mathcal{G}\frac{M_S m}{2R}$ $\quad \boxed{E_m = E_c + E_p = \mathcal{G}\frac{m M_S}{2R} - \mathcal{G}\frac{m M_S}{R} = -\mathcal{G}\frac{m M_S}{2R}}$

6) Période : $T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{\mathcal{G}M_S}}$ soit $\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{\mathcal{G}M_S}}$

Pour un mvt elliptique : $\boxed{E_m = -\mathcal{G}\frac{m M_S}{2a}}$ et $\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}M_S}}$.

7)



$$\boxed{2a = a_T + a_M}$$

8) En T sur l'orbite circulaire : $\boxed{v_T = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G} M_S}{a_T}}}$

sur l'orbite elliptique : $E_m = -\mathcal{G}\dfrac{m M_S}{2a} = \dfrac{m v^2}{2} - \mathcal{G}\dfrac{m M_S}{r}$

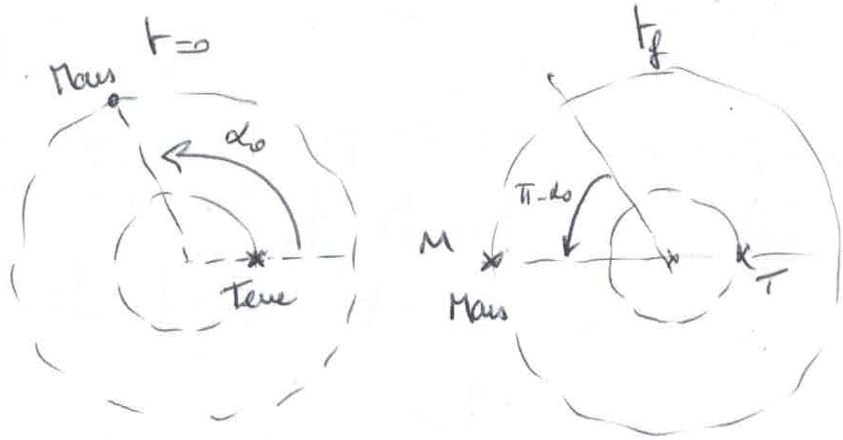
en T : $v = v'_T$ et $r = a_T$ soit $\dfrac{\cancel{m} v'^2_T}{2} - \mathcal{G}\dfrac{\cancel{m} M_S}{a_T} = -\mathcal{G}\dfrac{\cancel{m} M_S}{a_T + a_M}$

soit $\boxed{v'_T = \sqrt{2\mathcal{G} M_S\left(\dfrac{1}{a_T} - \dfrac{1}{a_T + a_M}\right)}}$

AN : $\Delta v_T = v'_T - v_T = 2{,}93.10^3\ m.s^{-1}$

9) $\boxed{\Delta t = \dfrac{T'}{2}}$ avec $\boxed{T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{\mathcal{G} M_S}}}$ AN : $\Delta t = 2{,}23.10^7\ s = 259$ jours

10)



Entre $t=0$ et t_f : Mars a balayé un angle $\pi - \alpha_0$ en un temps : $t_{Mars} = \dfrac{a_M(\pi - \alpha_0)}{v_M}$

Entre $t=0$ et t_f : le vaisseau est passé de T à M en un temps Δt

$\Delta t = \dfrac{a_M(\pi - \alpha_0)}{v_M}$ soit $\pi - \alpha_0 = \dfrac{\Delta t\, v_M}{a_M}$ et $\boxed{\alpha_0 = \pi - \dfrac{\Delta t\, v_M}{a_M}}$

AN $\alpha_0 = 0{,}77$ rad ou $44{,}4°$

11) Le vaisseau a décrit l'ellipse complète en un temps $\boxed{T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM_S}} = 2\Delta t}$

La terre pendant ce temps a balayé un angle α_T et a parcouru la distance $\alpha_T a_T$ à la vitesse $v_T = \sqrt{\dfrac{GM_S}{a_T}}$ d'où :

$$T' = \frac{\alpha_T a_T}{v_T} \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha_T = T'\frac{v_T}{a_T}} = 8{,}86\,\text{rad}$$

$$\alpha_T - 2\pi = 2{,}57\,\text{rad ou } 148°$$

La Terre a fait un tour complet et a balayé en plus un angle de 148°

Donc le vaisseau ne peut pas se poser sur la Terre.