PROBLÈME
De l'évolution du concept d'atome au cours du XX^{e} siècle

Ce problème aborde certaines étapes de l'histoire des sciences qui ont permis, au cours du XX^{e} siècle, de préciser la structure et les propriétés de l'atome. Dans la **partie I**, on s'intéressera à l'expérience de *E. Rutherford*, qui conduisit à abandonner le modèle de *J. J. Thomson* au profit de celui de *J. Perrin*. Les limites de ce modèle feront l'objet de la **partie II**, limites qui seront partiellement levées dans la **partie III** avec les postulats de *N. Bohr*. L'expérience historique de *O. Stern* et *W. Gerlach*, décrite dans la **partie IV**, apportera la preuve de l'existence d'un moment magnétique propre de l'électron. On verra dans la **partie V** de quelle manière l'interprétation première de cette expérience a été mise en défaut avec l'effet Zeeman. C'est finalement la mécanique quantique qui apporte à ce jour la description la plus complète de l'atome : la **partie VI** étudiera le mouvement de l'électron d'un atome d'hydrogène à partir de l'équation de *E. Schrödinger*.
Les effets liés à la gravité seront négligés dans l'ensemble du problème.

Le rotationnel d'un champ $\vec{F}\left(F_x, F_y, F_z\right)$ a pour expression, en coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} \partial F_z/\partial y - \partial F_y/\partial z \\ \partial F_x/\partial z - \partial F_z/\partial x \\ \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y \end{pmatrix}.$$

Données numériques

Constante de Planck	$h = 6,6\cdot10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$
Charge électrique élémentaire	$e = 1,6\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,1\cdot10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Electronvolt	$1\ \mathrm{eV} = 1,6\cdot10^{-19}\ \mathrm{J}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,9\cdot10^{-12}\ \mathrm{A^2\cdot s^4\cdot kg^{-1}\cdot m^{-3}}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,0\cdot10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Partie I - Limite du modèle de *J. J. Thomson* à travers l'expérience de *E. Rutherford*

En 1898, *J. J. Thomson* fait l'hypothèse que les atomes sont constitués d'électrons emprisonnés dans une sorte de gelée de charges positives. Ce modèle est appelé modèle du "plum pudding", car *J. J. Thomson* compare les électrons aux raisins du célèbre dessert anglais. Le physicien *Jean Perrin* imagine, quant à lui, l'atome à l'image du système solaire. Il suppose que les électrons gravitent, à des distances immenses, autour d'un « soleil » d'électricité positive, sur des orbites pour lesquelles force coulombienne et force d'inertie s'équilibrent.

En 1909, *Ernest Rutherford*, procède à une série d'expériences dans lesquelles un faisceau de particules alpha (noyaux d'hélium 4 : ${}^{4}_{2}He$), ayant toutes la même énergie cinétique, est lancé contre une mince feuille d'or. Il observe que la majorité des particules alpha traversent la feuille d'or, mais qu'une faible proportion d'entre elles « rebondit » sur celle-ci. Le but de cette partie est de déterminer quel modèle est en accord avec cette observation expérimentale.

Nous nous plaçons d'abord dans le cadre du modèle de *J. J. Thomson*, supposant une répartition uniforme de la charge positive dans la feuille d'or.

Q1. Expliquer qualitativement pourquoi le modèle proposé par *J. J. Thomson* est incompatible avec les observations de *E. Rutherford*.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre du modèle de *J. Perrin*, supposant l'existence d'un noyau massif de charge positive, et on étudie le mouvement de la particule alpha lors de son passage à proximité de ce noyau.

Le noyau d'or, de charge positive ponctuelle $Z.e$, supposé ponctuel et immobile dans le référentiel galiléen du laboratoire, se situe au point O, origine d'un repère cartésien orthonormé $\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$. Nous considérons qu'à l'instant initial t = 0 s, la particule alpha, de masse m_α et de charge électrique $q_\alpha = +\,2.e$, vient de « l'infini » avec un mouvement rectiligne uniforme caractérisé par un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0} = \vec{v}(t=0) = v_0 \cdot \overrightarrow{e_x}$. On désigne par b la distance du point O à la trajectoire de la particule à l'infini (**figure 1**). À chaque instant t, on note $d(t)$ la distance entre la particule alpha et le point O. La particule alpha est donc repérée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t) = d(t)\cdot\overrightarrow{e_r}$, avec $\left(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z}\right)$ une base cylindrique locale directe.

Au plus proche du point O, la particule alpha est au point S, la distance minimale en ce point est notée d_m. La particule alpha est non relativiste. L'expérience a été réalisée sous très faible pression.

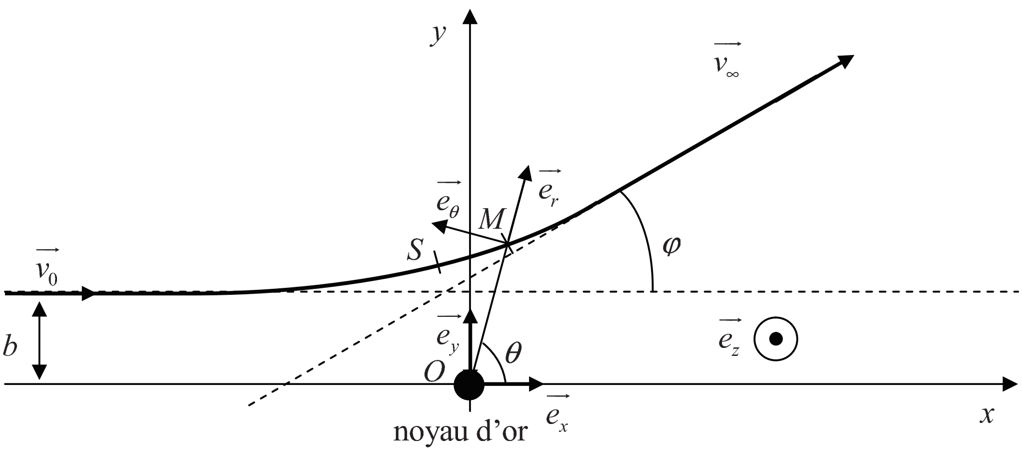

Figure 1 – Expérience de *Ernest Rutherford*

Q2. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur la particule alpha en fonction de e, Z, d, ε_0 et $\overrightarrow{e_r}$. Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p qui y est associée, en considérant que $\lim\limits_{d\to+\infty} E_p(d) = 0$, en fonction de e, Z, d et ε_0. Réécrire ces deux expressions en fonction de $K = \dfrac{Z\cdot e^2}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}$ et d.

Citer les propriétés de cette force qui permettent d'affirmer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ par rapport au point O et l'énergie mécanique E_M de la particule alpha se conservent.

Q3. Déterminer, en fonction de m_α et v_0, l'énergie mécanique E_M de la particule alpha.

Q4. Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$, en fonction de b, m_α, v_0 et l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$. Pour cela, vous pourrez calculer $\overrightarrow{L_O}$ en M_0, position initiale de la particule alpha telle que $\overrightarrow{OM_0} = X \cdot \overrightarrow{e_x} + b \cdot \overrightarrow{e_y}$.

Q5. Établir, à un instant t quelconque, l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ en fonction de $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$, m_α, d et de l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$.

En déduire une relation entre d, b, $\dot{\theta}$ et v_0.

Q6. Au sommet S de la trajectoire, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_S}$, de norme v_S, de la particule alpha est perpendiculaire au rayon vecteur $\overrightarrow{OS}$, de norme d_m. Déterminer un polynôme du second degré en d_m et en déduire l'expression de d_m en fonction de K, b, m_α et v_0.

Q7. Malheureusement, b est inaccessible à la mesure. Par contre, l'angle de déviation φ est facilement mesurable. Il faut donc trouver la relation qui lie φ à b. Pour cela, vous écrirez le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) en fonction de K, d, m_α, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{e_r}$. Projeter le P.F.D. sur l'axe des x en introduisant la composante v_x de la vitesse selon l'axe des x, et l'angle θ (**figure 1**, page 3).

Réécrire cette équation en fonction uniquement de v_x, θ, $\dot{\theta}$, K, b, m_α et v_0.

Intégrer cette équation entre $t = 0$ et $t \to \infty$. On remarquera que $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t) \approx \varphi$.

En déduire que la relation qui lie φ à b est : $\tan\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{K}{b \cdot m_\alpha \cdot v_0^2}$.

On rappelle que : $\cos\varphi - 1 = -2 \cdot \sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$ et $\sin\varphi = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

Q8. À partir de quelle valeur de φ les particules alpha rebondissent-elles sur la feuille d'or ? Expliquer pourquoi le modèle de *J. Perrin* permet d'interpréter les observations de *E. Rutherford*.

Nous nous proposons maintenant d'évaluer une borne supérieure à la dimension de ce noyau.

Q9. Montrer que la relation qui lie d_m à φ est : $d_m = \dfrac{K}{m_\alpha \cdot v_0^2} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}\right)$.

Q10. Pour quelle valeur φ_m de l'angle φ, la distance d'approche est-elle minimale ? Déterminer, dans ce cas, l'expression de d_m en fonction de K, m_α et v_0.

Q11. Que vaut b pour $\varphi = \varphi_m$? Représenter l'allure de la trajectoire de la particule alpha pour cet angle et faire figurer d_m sur votre schéma. Justifier que d_m constitue une borne supérieure du rayon du noyau.
Sachant que l'énergie typique d'une particule alpha est de 5 MeV et que le numéro atomique de l'or est $Z = 79$, déterminer numériquement la valeur de d_m.

Q12. Justifier que, pour effectuer des expériences de physique nucléaire, il faut disposer de particules de haute énergie.

Partie II - Limite du modèle planétaire

Le modèle de *J. J. Thomson* est écarté et l'on considère que les électrons évoluent, avec un mouvement circulaire uniforme, autour d'un noyau massif de charge électrique positive. Néanmoins, ce modèle est en contradiction avec une loi classique de l'électromagnétisme : toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique.
Pour mettre en évidence les conséquences de cette loi classique de l'électromagnétisme, nous allons étudier le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène, de masse m_e et de charge électrique $q_e = -e$, qui tourne autour de son noyau, un proton de masse m_p et de charge électrique $q_p = +e$, sur une orbite circulaire de rayon r (**figure 2**). Le noyau est considéré, dans le référentiel galiléen du laboratoire, fixe, ponctuel et placé en son centre C. Le centre de la trajectoire circulaire de l'électron est donc C.

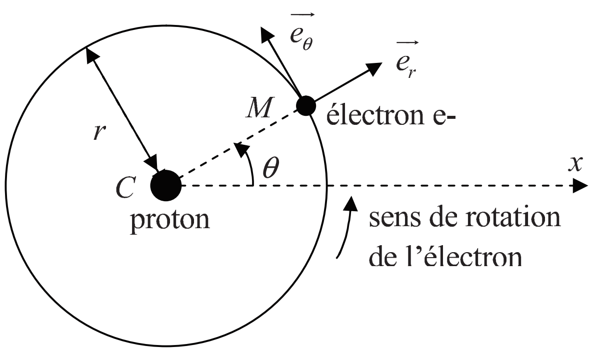

Figure 2 – Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

Pour étudier le mouvement circulaire de l'électron, nous allons utiliser le repère polaire pour lequel, en un point M de la trajectoire décrite par l'électron, on associe deux vecteurs unitaires $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ (**figure 2**). $\vec{e_\theta}$ est le vecteur tangent à la trajectoire au point M et dirigé dans le sens du mouvement. La position de l'électron est repérée par le vecteur position : $\overrightarrow{CM} = r \cdot \vec{e_r}$ et l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{Cx}, \overrightarrow{CM}\right)$.

Q13. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ de l'électron en fonction de e , m_e, ε_0 , r et d'un vecteur unitaire.

Q14. Exprimer l'énergie mécanique $E_M(r)$ de l'électron sous la forme $E_M(r) = A \cdot f(r)$ où A est une constante négative dont vous préciserez l'expression en fonction de e, ε_0 et $f(r)$ une fonction qui ne dépend que de r que vous déterminerez également.