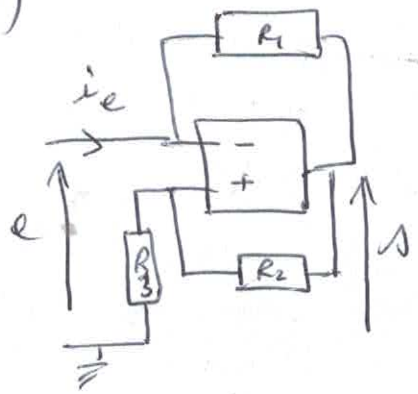
Montage à résistance négative

1)



Rétroaction négative ⇒ fonctionnement en régime linéaire

$$v^+ = v^- = e$$

$$v^+ = \frac{\frac{0}{R_3} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_3}{R_3 + R_2} s$$

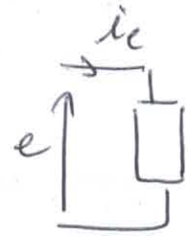
$$v^- = \frac{i_e + \frac{s}{R_1}}{\frac{1}{R_1}} = s + R_1 i_e$$

$$\Rightarrow \frac{R_3}{R_3+R_2} s = s + R_1 i_e =$$

donc $s = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) e$ et $s + R_1 i_e = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) e + R_1 i_e = e$

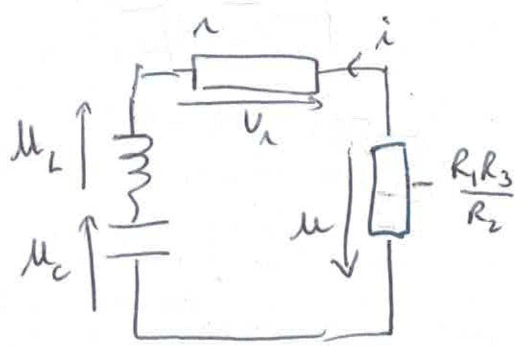
d'où $\frac{R_2}{R_3} e + R_1 i_e = 0$

et $\boxed{e = -\frac{R_1 R_3}{R_2} i_e}$ ce montage est équivalent à une résistance négative



$R_{eq} = -\frac{R_1 R_3}{R_2}$

2) Circuit équivalent :



loi des mailles : $u_C + u_L + u_r + u = 0$

avec $u_L = L\frac{di}{dt}$ $\quad i = \frac{dU_C}{dt}$

$$u_L = CL\frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

$$u + u_r = \left(r - \frac{R_1R_3}{R_2}\right) i = \left(r - \frac{R_1R_3}{R_2}\right) C \frac{du_C}{dt}$$

d'où $LC\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \left(r - \frac{R_1R_3}{R_2}\right) C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

soit $$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} - \frac{R_1R_3}{R_2 L}\right)\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = 0}$$

3) a et b. Pour $r = \frac{R_1R_3}{R_2}$ on obtient l'éq. d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T_0}$

soit $\boxed{r = 10\,\Omega}$

on lit $T_0 = \frac{3{,}7}{3} = 1{,}23$ ms soit $\boxed{C = \frac{T_0^2}{4\pi^2 L}} = 1{,}3\ \mu F$.

($L = 30$ mH code ligne 13)

4) Pour résoudre $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{R_1 R_3}{R_2 r}\right)\frac{dU_c}{dt} + \omega_0^2 U_c = 0$

on écrit l'équation caractéristique : $x^2 + \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{R_1 R_3}{R_2 r}\right)x + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{R_1 R_3}{R_2 r}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0$$

car on observe des régimes pseudo-périodiques

$$x_\pm = \underbrace{\boxed{-\frac{1}{2\tau}\left(1 - \frac{R_1 R_3}{R_2 r}\right)}}_{\alpha =} \pm j \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}}_{= \omega}$$

partie réelle dans l'exponentielle

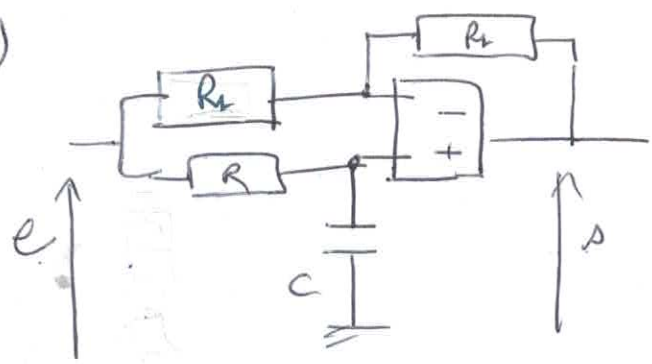
partie imaginaire dans cos et sin

$$U_c(t) = e^{\alpha t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$$

pour $\alpha > 0$: $e^{\alpha t}$ est croissante
courbe de gauche c'est pour $r = 3\,\Omega$

pour $\alpha < 0$: $e^{\alpha t}$ est décroissante
courbe de droite, c'est pour $r = 300\,\Omega$

Déphaseur

1) 

Le circuit présente une rétroaction négative donc il peut fonctionner en régime linéaire, on étudie ce régime où $\underline{v}^+ = \underline{v}^-$

$$\underline{v}^+ = \frac{\frac{\underline{e}}{R} + \frac{0}{\underline{Z}_c}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_c}} = \frac{\underline{Z}_c}{R + \underline{Z}_c} \times \underline{e} = \frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega}$$

$\underline{Z}_c = 1/jc\omega$

$$\underline{v}^- = \frac{\frac{\underline{e}}{R_1} + \frac{\underline{s}}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}} = \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2}$$

On applique $\underline{v}^+ = \underline{v}^-$ soit : $\frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega} = \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2} \Rightarrow 2\underline{e} = (1 + jRC\omega)(\underline{e} + \underline{s})$

soit $\underline{e}(2 - 1 - jRC\omega) = \underline{s}(1 + jRC\omega)$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}}$$

$|\underline{H}| = 1$

$\arg \underline{H} = \arg(1 - jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega)$
$= 2 \arg(1 - jRC\omega)$
$= 2 \arctan(-RC\omega)$

$\varphi = -2\arctan(RC\omega) < 0$

2) Circuit déphaseur : s et e ont toujours la même amplitude et sont déphasés l'un par rapport à l'autre ; s est toujours en retard / à e

$\boxed{s(t) = E\cos(\omega t + \varphi)}$ avec $\boxed{\varphi = -2\arctan(RC\omega)}$

3) On mesure $2T = 5$ ms soit $T = 2{,}5$ ms et $\boxed{f = \frac{1}{T} = 400 \text{ Hz}}$

s(t) est en retard / à e(t) : $\varphi = -2\pi \frac{\Delta t}{T} = -2\pi \frac{0{,}65}{4{,}4} = -0{,}93$ rad

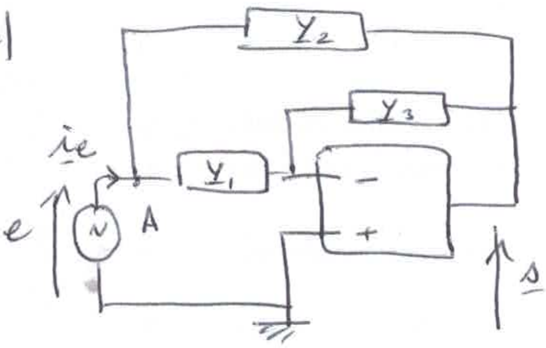
e(t) a une amplitude $\boxed{E = 2 V}$

$-\tan \frac{\varphi}{2} = RC\omega \Rightarrow C = -\frac{1}{R\omega} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$\boxed{C = 1 \cdot 10^{-7} F}$

Simulateur d'inductance

1)



l'ALi fonctionne en régime linéaire car il présente une rétroaction négative.

$$\left.\begin{array}{l} \underline{v}^+ = 0 \\ \underline{v}^- = \dfrac{\underline{e} \times \underline{Y}_1 + \underline{s} \times \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{v}^- = \underline{v}^+ \\ \underline{s} = -\dfrac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_3}\underline{e} \end{array}$$

Millman en A donc : $\underline{e} = \dfrac{\underline{i}_e + \underline{v}^- \times \underline{Y}_1 + \underline{s} \times \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$ avec $\underline{v}^- = \underline{v}^+ = 0$

$$\underline{s} = -\frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_3}\underline{e}$$

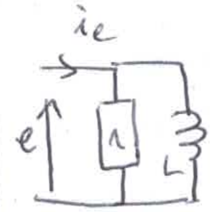
d'où $(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)\,\underline{e} = \underline{i}_e - \dfrac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_3}\underline{e}$

soit $\left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dfrac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_3}\right)\underline{e} = \underline{i}_e$

$$\boxed{\underline{Y}_e = \frac{\underline{i}_e}{\underline{e}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_3}}$$

2) $\underline{Y}_1 = \dfrac{1}{R_1}$ $\quad \underline{Y}_2 = \dfrac{1}{R_2}$ $\quad \underline{Y}_3 = jC\omega$

$$\underline{Y}_e = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jR_1R_2C\omega}$$



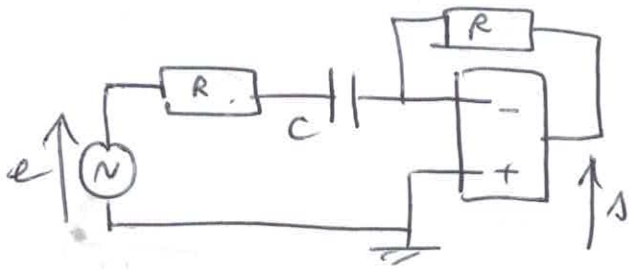
$$\underline{i}_e = (\underline{Y}_r + \underline{Y}_L)\,\underline{e} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{jL\omega}\right)\underline{e}$$

par identification : $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ soit $\boxed{r = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$

$$\frac{1}{R_1R_2C\omega} = \frac{1}{L\omega} \text{ soit } \boxed{L = R_1R_2C}$$

Filtre

1)



l'ALi fonctionne en régime linéaire car il y a une rétroaction négative.

$\underline{V}^+ = \underline{V}^-$

avec $\underline{V}^+ = 0$ et $\underline{V}^- = \dfrac{\dfrac{\underline{e}}{R + 1/jC\omega} + \dfrac{\underline{s}}{R}}{\dfrac{1}{R + 1/jC\omega} + \dfrac{1}{R}} = 0$

soit $\underline{e}\,\dfrac{-jC\omega R}{1 + jRC\omega} = \underline{s}$ soit $\boxed{\underline{H} = \dfrac{-j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$ avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}$

Filtre passe-haut

2) asymptotes

$\omega \gg \omega_0$: $\underline{H} \simeq -1$ $\quad G_{dB} = 0$ dB et $\varphi = \arg \underline{H} = \pi$ ou $-\pi$

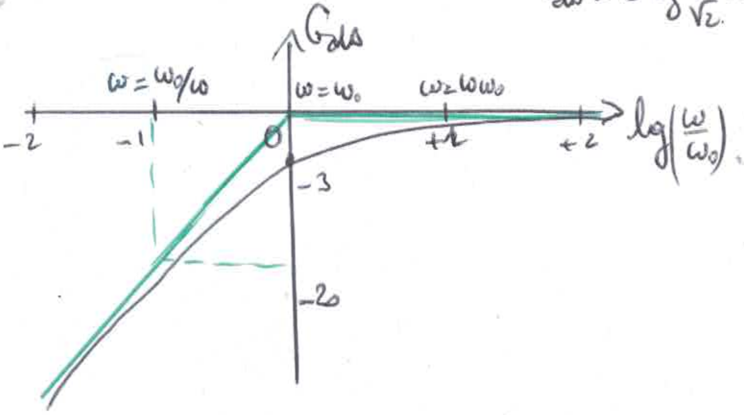
$\omega \ll \omega_0$: $\underline{H} = -j\frac{\omega}{\omega_0}$ $\quad G_{dB} = 20 \lg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ et $\varphi = \arg \underline{H} = -\frac{\pi}{2}$

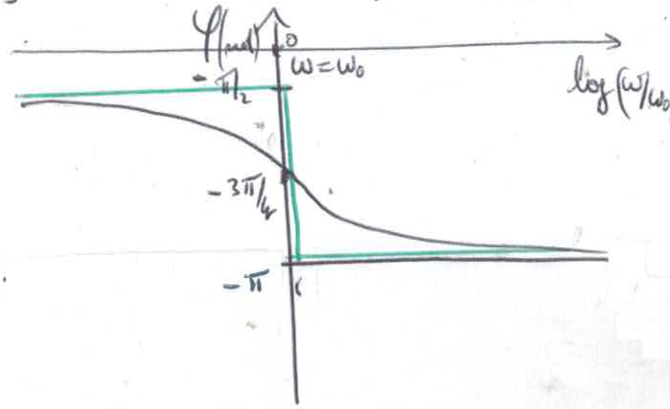
asymptote oblique de pente + 20 dB/décade

point réel

Pour $\omega = \omega_0$: $\underline{H} = \dfrac{-j}{1+j}$ $\quad |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \varphi = \arg \underline{H} = \arg(-j) - \arg(1+j)$

$G_{dB} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{2}} = -3$ $\quad = -\pi/2 - \pi/4 = -3\pi/4$





3) $e(t) = 2 + 3\cos(\omega_0 t) + 4\cos(2\omega_0 t)$

composante continue de fréquence nulle

$\underline{H}(0) = 0$

$\underline{H}(\omega_0) = \dfrac{-j}{1+j}$ $\quad |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \varphi = -3\pi/4$

pour $e_1 = 3\cos(\omega_0 t)$

$s_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t - 3\pi/4)$

$\underline{H}(2\omega_0) = \frac{-j2}{1+2j}$ $\quad |\underline{H}| = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad \arg \underline{H} = \arg(-2j) - \arg(1+2j)$

$= -\pi/2 - \arctan(2) = -2{,}7 \text{ rad}$

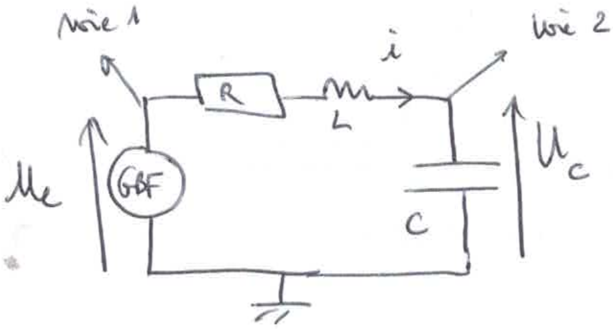
pour $e_2(t) = 4\cos(2\omega_0 t)$

$s_2(t) = \frac{4 \times 2}{\sqrt{5}} \cos(2\omega_0 t - 2{,}7)$

d'où $\boxed{s(t) = 0 + \frac{3}{\sqrt{2}}\cos(\omega_0 t - 3\pi/4) + \frac{8}{\sqrt{5}}\cos(2\omega_0 t - 2{,}7)}$

Circuit RLC série

1)



$u_c(t)$ de la forme : $U_{cm}\cos(\omega t + \varphi_u)$

On trouvera U_{cm} et φ_u en faisant

$U_{cm} = |\underline{u}_c|$ et $\varphi_u = \arg(\underline{u}_c)$

Pont diviseur de tension : $\underline{u}_c = \dfrac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega}\,\underline{u}_e = \dfrac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}\,\underline{u}_e$

$$U_{cm} = |\underline{u}_c| = \frac{|\underline{u}_e|^{=U_0}}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} = 7{,}7\ \text{V} \qquad (\omega = 2\pi f)$$

$$\varphi_u = \arg \underline{u}_c = \underbrace{\arg(\underline{u}_e)}_{0} - \arg(1 - LC\omega^2 + jRC\omega) = -\arctan\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right) = -0{,}96\ \text{rad}$$

D'où $\boxed{u_c(t) = 7{,}7\cos(\omega t - 0{,}96)}$

De même $i(t)$ de la forme : $I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

avec $\underline{i} = jC\omega\,\underline{u}_c$ soit $I_m = |\underline{i}| = C\omega|\underline{u}_c| = C\omega U_{cm} = 24\ \text{mA}$

soit $\varphi_i = \arg(\underline{i}) = \arg(jC\omega) + \arg(\underline{u}_c) = \frac{\pi}{2} + \varphi_u = 0{,}61\ \text{rad}$

soit $\boxed{i(t) = 24\cos(\omega t + 0{,}61)\ \text{(en mA)}}$

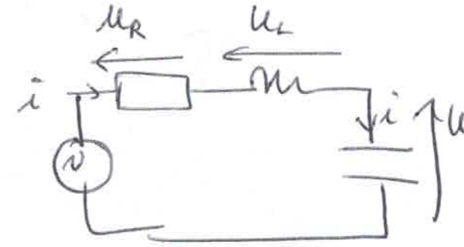
2) $\underline{i} = \dfrac{\underline{u}_e}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$ soit $\boxed{I_m = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}}$

L'amplitude de $i(t)$ dépend de ω, on parle de résonance lorsque l'amplitude est maximale soit pour I_m maximale, ce qui se produit ici pour $R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ minimale puisque le numérateur est constant.

Et $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2$ est minimal pour $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ soit $\boxed{\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

Soit $\boxed{C = \frac{1}{\omega_r^2 L} = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = 1{,}98\ \mu F}$

à résonance : $\boxed{I_m = \frac{U_0}{R}} = 29\ mA$



$\underline{u}_R = R\,\underline{i}$ donc $\boxed{U_{Rm} = R\,I_m = 5V}$

$\underline{u}_L = jL\omega\,\underline{i}$ donc $\boxed{U_{Lm} = L\omega\,I_m} = 5{,}83\,V$

$\underline{u}_C = \frac{\underline{i}}{jC\omega}$ donc $\boxed{U_{Cm} = \frac{I_m}{C\omega}} = 5{,}83\,V$

3) Pont diviseur de tension : $\underline{u}_C = \frac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega}\,\underline{u}_e$

soit $\underline{H} = \frac{\underline{u}_C}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$ par identification : $LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

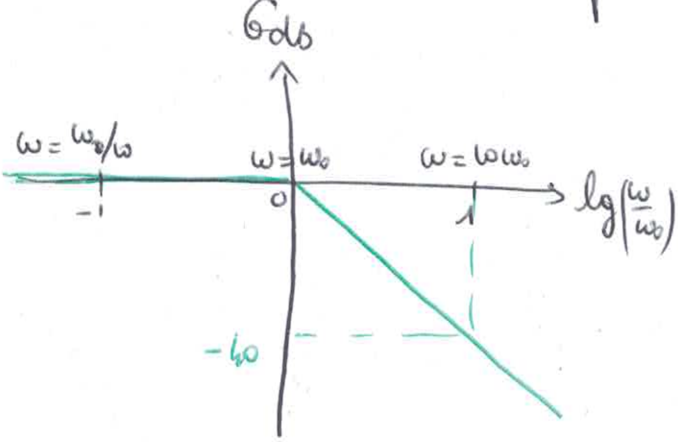
$RC\omega = \frac{\omega}{Q\omega_0} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

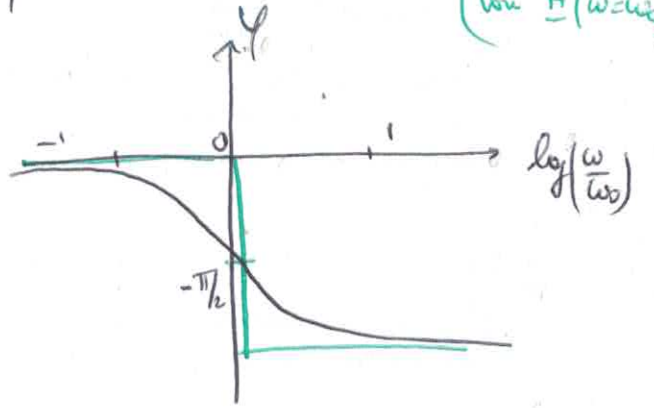
$\omega \ll \omega_0$: $\underline{H} = 1$ $\quad G_{dB} = 20 \lg |\underline{H}| = 0$ $\quad \varphi = \arg \underline{H} = 0$

$\omega \gg \omega_0$: $\underline{H} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ $\quad G_{dB} = +40 \lg\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) = -40 \lg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ $\quad \varphi = \arg(\underline{H}) = \pi$ ou $-\pi$

pente -40 dB/décade

car $\varphi < 0$
(voir $\underline{H}(\omega = \omega_0)$





$\underline{H}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{Q}{j}$ $\qquad G_{dB} = 20 \log Q$ $\qquad \varphi = \arg(\underline{H}) = \arg Q - \arg j = -\pi/2$

$\underset{0}{\ }$

$$U_{cm} = |\underline{u}_c| = \frac{|\underline{u}_e| = U_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$$

A la résonance, U_{cm} est maximale soit le dénominateur est minimal

on pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ ($f(x)$ est la fonction sous la racine carrée au dénominateur)

on cherche le minimum de $f(x)$ soit :

$$f'(x) = 2(1-x^2)(-2x) + \frac{2x}{Q^2}$$

$$= 2x\left[-2 + 2x^2 + \frac{1}{Q^2}\right)$$

$$= 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } \boxed{x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}} > 0$$

la résonance en tension est possible

pour $\frac{1}{2Q^2} < 1$.. soit $\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ dans ce

cas $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ soit la pulsation

de résonance est $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$