Chapitre M4: Application des changements de référentiel: la dynamique terrestre

I. Les référentiels d'étude

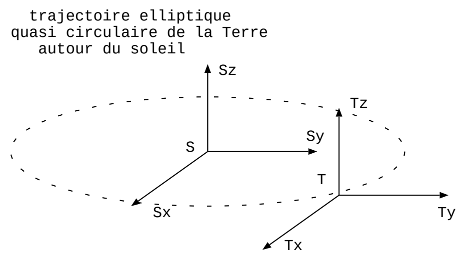
On définit dans un premier temps le référentiel galiléen de référence appelé référentiel de Copernic noté $\mathcal{R}_c$:

Son origine : barycentre du système solaire (confondu avec le centre du soleil)

Ses axes : dirigés selon trois étoiles lointaines

Nous qui vivons sur Terre sommes liés à un référentiel en mouvement dans le référentiel de Copernic. On définit deux référentiels d'étude liés à la Terre:

Le référentiel géocentrique noté $\mathcal{R}_g$ qui tient compte du mouvement elliptique, quasi-circulaire, de la Terre autour du soleil:

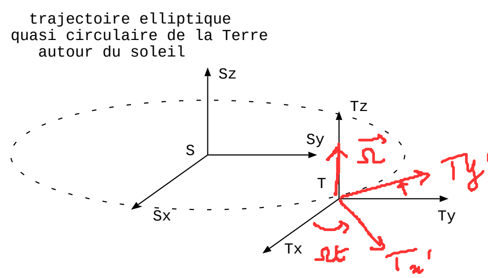


Son origine : barycentre de la Terre (confondu avec son centre)

Ses axes : sont parallèles à ceux de R_C

Ce référentiel est en translation elliptique (quasi-circulaire) dans le référentiel de Copernic, il est donc non galiléen (il n'est pas en translation rectiligne uniforme dans R_C galiléen).

Le référentiel terrestre noté $\mathcal{R}_T$ qui tient compte du mouvement de rotation propre de la Terre sur elle même à la vitesse angulaire Ω.



Son origine : barycentre de la Terre (confondu avec son centre)

Ses axes : sont liés à la Terre

Ce référentiel est en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique, il est donc non galiléen.

Dans ce chapitre, on étudie dans le II l'effet de la rotation propre de la Terre :

- le référentiel $\mathcal{R}$ fixe est le référentiel géocentrique, et il est supposé galiléen
- le référentiel mobile $\mathcal{R}'$ est le référentiel terrestre en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique, il est donc

On étudie dans le III l'effet du mouvement de la Terre autour du soleil qui se manifeste par les marées océaniques.

- le référentiel $\mathcal{R}$ fixe est le référentiel de Copernic galiléen
- le référentiel mobile $\mathcal{R}'$ est le référentiel géocentrique en translation quasi-circulaire dans le référentiel de Copernic, il est donc

Remarque: jusqu'à présent dans tous les exercices, on a supposé le référentiel terrestre galiléen. Ce chapitre doit répondre aux questions: dans quelles conditions le référentiel terrestre peut-il être considéré galiléen? lorsque ces conditions ne sont pas réunies, quels sont les effets du caractère non galiléen de ce référentiel sur le mouvement des objets?

II. Conséquence de la rotation propre de la Terre

1. Le référentiel d'étude

Dans tout le II, le référentiel géocentrique est supposé galiléen (c'est notre référentiel $\mathcal{R}$ de référence) et le référentiel terrestre est le référentiel mobile, il est en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique donc R_T n'est pas galiléen.

Valeur numérique : $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7{,}3.10^{-5}\ \text{rad s}^{-1}$

Ω : vitesse angulaire de la rotation propre de la Terre

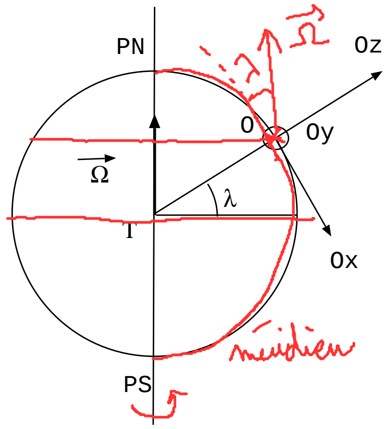
T : période de rotation propre de la Terre (durée d'un jour)

Dans le référentiel $\mathcal{R}_T$, on utilise le repère suivant:

parallèle

équateur

la Terre tourne d'ouest en est



Oz désigne la verticale du lieu (je lève la tête vers le ciel)

Ox est tangent à un méridien dirigé vers le sud

Méridien : ligne sur la Terre qui rejoint les pôles

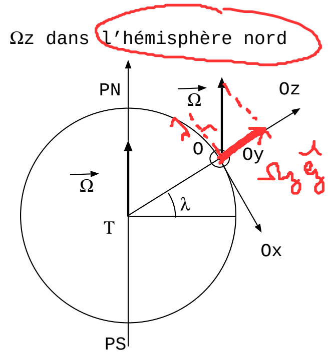
Oy est tangent à un parallèle dirigé vers l'est

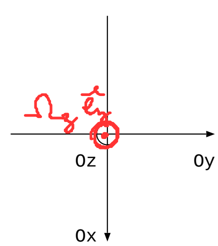
parallèle : ligne sur la Terre parallèle à l'équateur

Expression de $\vec{\Omega}$ sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{\Omega} = \Omega \left[\cos(\pi - \lambda)\,\vec{e_x} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)\vec{e_z}\right]$

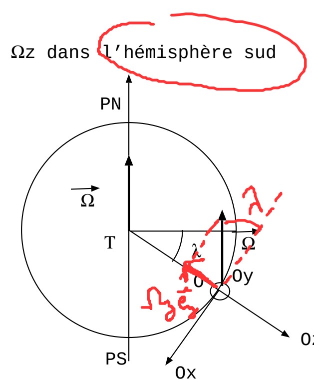
$= \Omega \left[-\cos\lambda\,\vec{e_x} + \sin\lambda\,\vec{e_z}\right]$

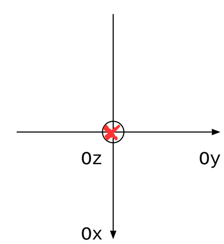
Remarque importante : la projection de $\vec{\Omega}$ change de signe sur Oz dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère sud.





$\Omega_z = \Omega \sin\lambda > 0$ ($\lambda > 0$ hémisphère nord)

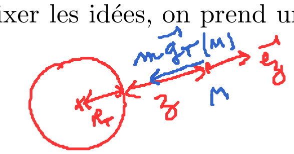




$\Omega_z = \Omega \sin\lambda < 0$ ($\lambda < 0$ hémisphère sud)

2. Statique dans le référentiel terrestre

Soit un point M à l'équilibre dans le référentiel terrestre, **non galiléen**. Pour fixer les idées, on prend un pendule soit un point M suspendu à un fil accroché au plafond. M subit:



- l'attraction de la Terre : $m\vec{g_T}(M) = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{(R_T + z)^2}\vec{e_z}$
- la tension du fil $\vec{T_{fil}}$
- les forces d'inertie : $\vec{F_{ie}} = m\Omega^2 \vec{HM}$ et $\vec{F_{ic}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{R_T}$ (H projeté $\perp$ de M sur l'axe des pôles)

La force d'inertie de Coriolis est nulle car M est à l'équilibre dans R_T ($\vec{v}(M)_{R_T} = \vec{0}$)

Rq : $g_T(z=0) = \mathcal{G}\frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}81\ \text{m s}^{-2}$

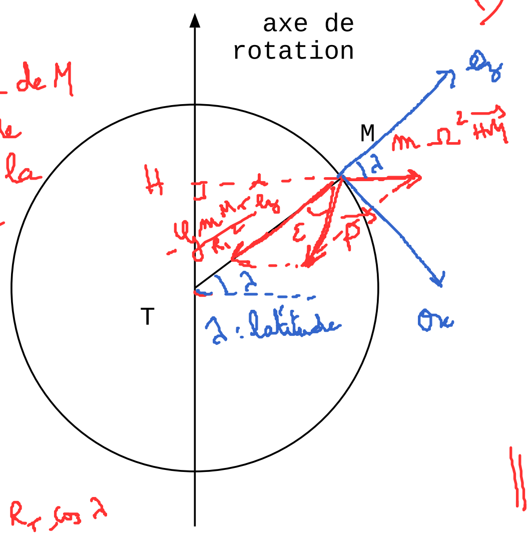
La RFD appliquée à M dans $\mathcal{R}_T$ s'écrit: $m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{0} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{(R_T+z)^2}\vec{e}_z + \vec{T}_{fil} + m\Omega^2\overrightarrow{HM}$

Qu'appelle-t-on poids? Jusqu'à présent on disait que M était à l'équilibre sous l'action de son poids et de la tension du fil soit $\vec{P} + \vec{T}_{fil} = \vec{0}$

d'où $\boxed{\vec{P} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{(R_T+z)^2}\vec{e}_z + m\Omega^2\overrightarrow{HM}}$

le poids est donc la somme de l'attraction terrestre et de la force centrifuge liée à la rotation propre de la Terre

H projeté ⊥ de M sur l'axe de rotation de la Terre = axe des pôles



$HM = R_T\cos\lambda$

$g_0 = \mathcal{G}\frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

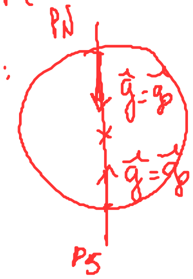
Le poids n'est donc pas dirigé vers le centre de la Terre. On note $\vec{P} = m\vec{g}$: on cherche l'expression de $\vec{g}$ pour un point M à la surface de la Terre.

$$\vec{g} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{R_T^2}\vec{e}_z + \Omega^2 HM\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)\vec{e}_x + \cos\lambda\,\vec{e}_z\right]$$

$$= +\Omega^2 R_T\cos\lambda\sin\lambda\,\vec{e}_x + \left[-g_0 + \Omega^2 R_T\cos^2\lambda\right]\vec{e}_z$$

$$\|\vec{g}\| = \sqrt{(\Omega^2 R_T\cos\lambda\sin\lambda)^2 + (-g_0 + \Omega^2 R_T\cos^2\lambda)^2}$$

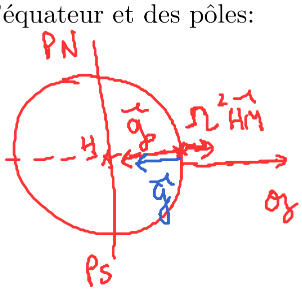
Aux pôles :



le poids est dirigé vers le centre de la Terre ; c'est là où l'on est le + lourd (la force centrifuge est nulle)

Cas particulier de l'équateur et des pôles:

A l'équateur :



$\vec{g} = (-g_0 + \Omega^2 \underbrace{HM}_{R_T})\vec{e}_z$: le poids est dirigé vers le centre de la Terre ; c'est là où l'on est le + léger

$\|\vec{g}\| = 9{,}81 - (7{,}3\cdot10^{-5})^2 \times 6{,}4\cdot10^6 = 9{,}78\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

La Terre est une centrifugeuse de laquelle on n'est pas expulsée car l'attraction terrestre est très intense par rapport à la force d'inertie centrifuge. En effet:

$$\frac{\cancel{m}g_T}{\cancel{m}\Omega^2 HM} = \frac{10}{(7{,}3\cdot10^{-5})^2\times(6{,}4\cdot10^6)} = \frac{10}{300}\times10^5 = 3\cdot10^4 \gg 1$$

donc la force centrifuge est négligeable devant l'attraction terrestre

Conclusion : En toute rigueur, le poids comprend l'attraction terrestre et la force d'inertie centrifuge. Sauf précision, on appelle poids la force d'attraction exercée par la Terre soit $\vec{P} = m\vec{g}(M)$. On néglige donc la force d'inertie d'entraînement devant l'attraction terrestre.

$= m\vec{g}_T(M)$

3. Dynamique dans le référentiel terrestre

Autres forces telles que la tension du fil, forces de réaction, force élastique ....

RFD dans $\mathcal{R}_T$: $m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{g} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_a$

c'est le poids qui contient la force centrifuge et que l'on néglige

$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}$

Exercice 1 : Un avion vole le long d'un méridien en se déplaçant du nord vers le sud à la latitude nord $\lambda = 35^0$ avec une vitesse de 1000 km/h relativement au référentiel terrestre. On donne $g = 10\ m/s^2$.

Déterminer le sens et la direction de la force de Coriolis exercée sur l'avion. Que se passe-t-il si l'avion vole à la latitude sud $\lambda = 35^0$?

Calculer le rapport des normes de la force de Coriolis et du poids exercés sur l'avion.

Exercice 2 : La déviation vers l'est

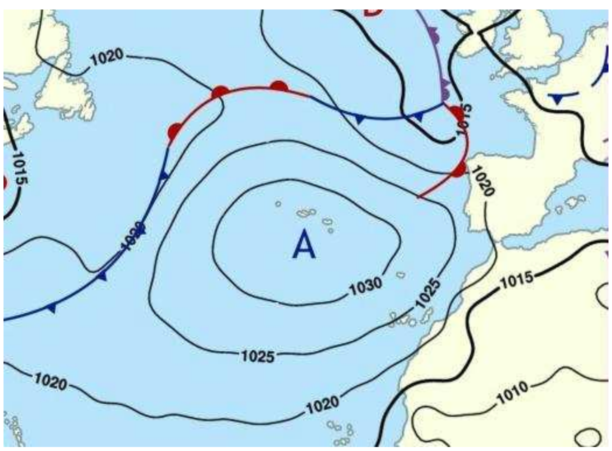
Soit un projectile assimilé à un point matériel M laché sans vitesse initiale à l'altitude h à la verticale d'un point O de la Terre à la latitude λ. On néglige la résistance de l'air.

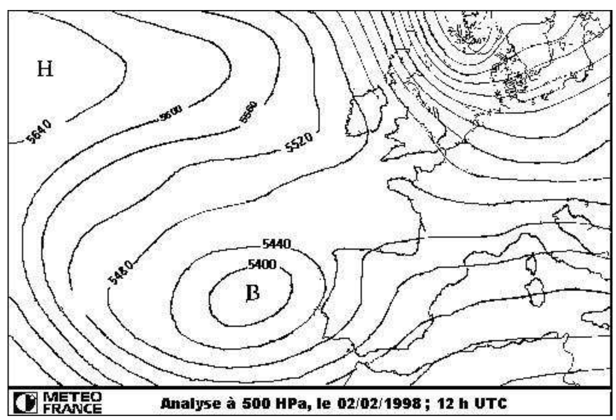
On assimile la terre à une sphère tournant autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire $\Omega_0 = 7,3.10^{-5}\ rad/s$. On note $\vec{g}_0$ le champ de pesanteur terrestre avec $g_0 = 10\ m/s^2$.

1. On considère que le référentiel terrestre est galiléen : donner l'expression de la vitesse $\vec{V}$ de M en fonction du temps. En quel point et au bout de combien de temps M tombe-t-il sur le sol?
2. On considère que le référentiel terrestre est non galiléen.
   (a) Ecrire la RFD appliquée à M. Pourquoi la force d'inertie d'entraînement n'intervient pas explicitement dans l'équation obtenue ?
   (b) On évalue la force d'inertie de Coriolis en utilisant la loi de vitesse de la question 1, justifier cette méthode. Déterminer la durée t_1 de la chute et les coordonnées (x_1, y_1) du point d'impact sur le sol. Calculer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(t_1)$ au point d'impact sur le sol.
   (c) Faire l'application numérique pour $h = 1\ km$ et $\lambda = 45^0$. La déviation dépend-elle de l'hémisphère?

Exercice 3 : Les vents dans l'hémisphère nord

Construire le mouvement des vents dans l'hémisphère nord autour d'une dépression et d'un anticylclone. Prévoir le sens des vents dans l'hémisphère sud.

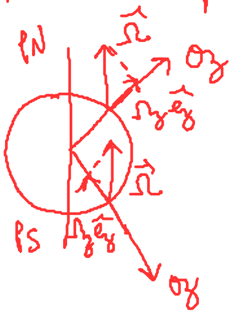




Anticyclone : zone de forte pression entourée de zones de faible pression

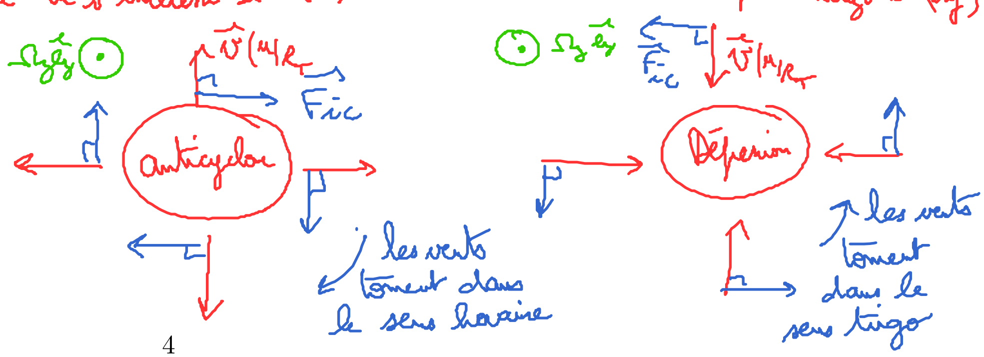
dépression : zone de faible pression entourée de zones de forte pression

Les masses d'air commencent par se déplacer des fortes vers les basses pressions : cela donne la direction de $\vec{v}(M)_{R_T}$. Puis elles subissent la force de Coriolis : $-2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}(M)_{R_T}$. On ne tient compte que de $\Omega_z\vec{e}_z$ car on s'intéresse à la rotation des vents dans le plan horizontal (Oxy)



hémisphère nord : $\Omega_z>0$

hémisphère sud : $\Omega_z<0$



III. Conséquence du mouvement de la Terre autour du soleil

1. Le référentiel d'étude.

On se place dans le référentiel géocentrique en translation quasi-circulaire dans le réf. de Copernic qui est galiléen donc R_g n'est pas galiléen.

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(T)_{R_C}$ $\qquad \vec{F}_{ic} = \vec{0}$

2. Que sait-on sur les marées?

BREST

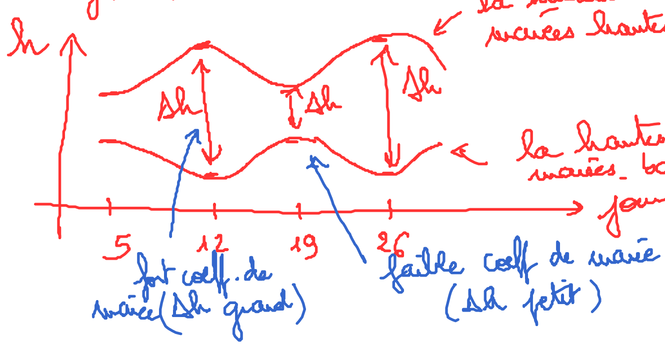
- Heure légale -

marées hautes   marées basses

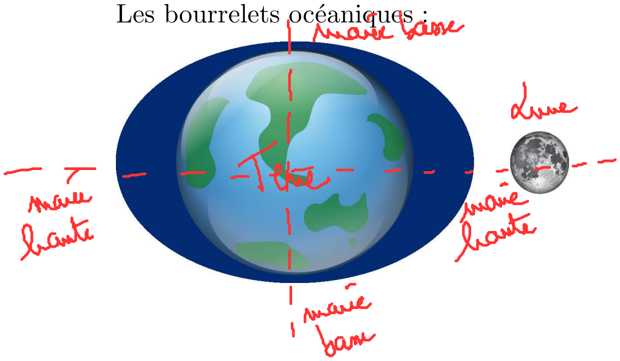
Janvier   Année : 2001

	Pleines Mers						Basses Mers			
Date	matin	haut.	coef	soir	haut.	coef	matin	haut.	soir	haut.
1 L	8 48	5,80	53	21 08	5,45	50	2 48	2,40	15 13	2,35
2 M	9 37	5,60	47	22 02	5,30	44	3 34	2,60	16 02	2,50
3 M	10 36	5,45	43	23 09	5,25	42	4 29	2,75	17 00	2,60
4 J	11 44	5,45	43	-- --	-- --	--	5 35	2,75	18 07	2,55
5 V	0 23	5,40	45	12 54	5,60	49	6 45	2,60	19 15	2,40
6 S	1 31	5,70	53	13 58	5,90	59	7 52	2,30	20 17	2,05
7 D	2 30	6,05	65	14 56	6,25	71	8 51	1,90	21 14	1,70
8 L	3 24	6,50	77	15 50	6,60	84	9 45	1,45	22 06	1,35
9 M	4 15	6,85	89	16 41	6,90	94	10 37	1,10	22 57	1,05
10 M	5 04	7,15	98	17 30	7,10	101	11 28	0,80	23 46	0,85
11 J	5 53	7,35	103	18 19	7,15	104	-- --	-- --	12 17	0,65
12 V	6 41	7,35	103	19 07	7,05	102	0 38	0,80	13 06	0,65
13 S	7 29	7,20	99	19 55	6,80	95	1 27	0,95	13 55	0,85
14 D	8 17	6,90	90	20 44	6,50	84	2 16	1,20	14 45	1,15
15 L	9 06	6,55	78	21 35	6,10	71	3 05	1,50	15 36	1,60
16 M	9 59	6,10	65	22 31	5,75	59	3 58	1,90	16 30	2,00
17 M	10 59	5,70	54	23 35	5,50	50	4 55	2,25	17 30	2,30
18 J	-- --	-- --	--	12 08	5,50	48	6 00	2,50	18 38	2,50
19 V	0 50	5,45	47	13 23	5,45	48	7 11	2,55	19 48	2,50
20 S	1 59	5,55	50	14 29	5,55	53	8 20	2,45	20 49	2,30
21 D	2 56	5,80	56	15 21	5,80	60	9 17	2,20	21 39	2,10
22 L	3 43	6,05	64	16 05	6,00	67	10 04	1,95	22 22	1,90
23 M	4 23	6,30	70	16 42	6,15	73	10 44	1,75	22 59	1,75
24 M	4 59	6,45	75	17 16	6,30	77	11 20	1,60	23 34	1,65
25 J	5 32	6,55	78	17 49	6,35	79	11 54	1,50	-- --	-- --
26 V	6 05	6,60	79	18 20	6,35	79	0 06	1,60	12 26	1,45
27 S	6 38	6,60	79	18 52	6,30	78	0 40	1,60	12 59	1,50
28 D	7 10	6,50	77	19 23	6,20	75	1 12	1,65	13 31	1,60
29 L	7 43	6,35	72	19 56	6,05	69	1 45	1,80	14 04	1,75
30 M	8 18	6,15	66	20 33	5,85	63	2 20	1,95	14 40	1,95
31 M	8 57	5,90	59	21 17	5,65	55	2 59	2,15	15 22	2,15

On constate qu'en un lieu donné, la hauteur d'eau varie au cours de la journée.
Quand la hauteur est maximale : c'est une marée haute.
Quand la hauteur est faible : c'est une marée basse.
Entre 2 marées hautes ou 2 marées basses successives il y a + de 12h

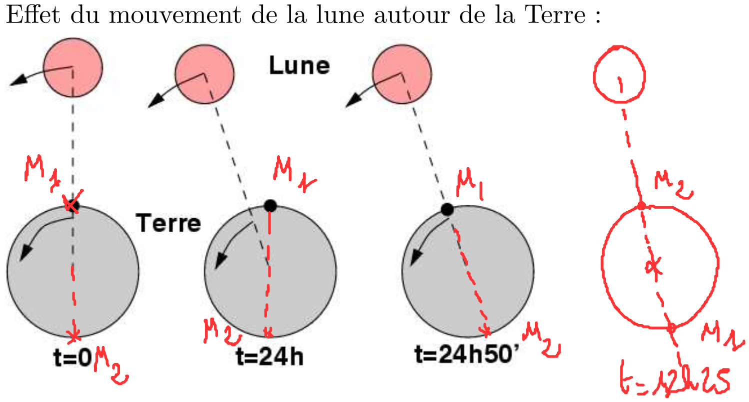


Les bourrelets océaniques :



Ce document montre que c'est la lune le principal acteur des marées et que les points sur l'axe Terre-lune sont à marée haute, les points sur l'axe ⊥ à l'axe Terre-lune sont à marée basse

Effet du mouvement de la lune autour de la Terre :

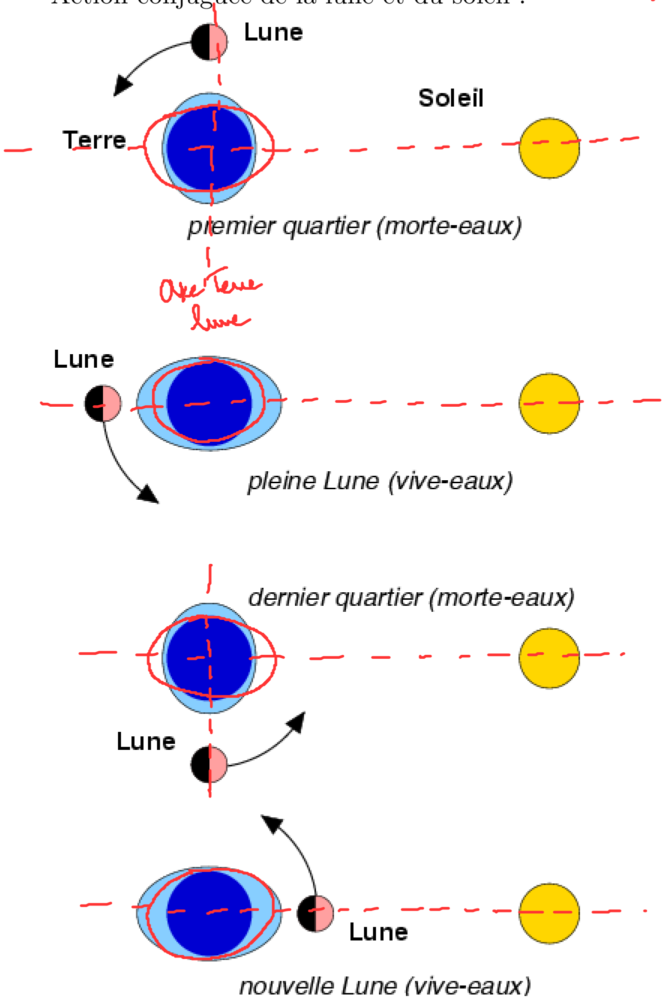


à $t=0$, M_1 et M_2 sont sur l'axe Terre-lune donc ils sont à marée haute. A cause du mvt de la lune autour de la Terre, M_1 et M_2 sont à nouveau sur l'axe Terre-lune à $t = 12h25$ min (et non 12h)

2 marées basses (ou hautes) consécutives en un lieu sont séparées de 12h25 min

Action conjuguée de la lune et du soleil :

en rouge je représente l'action du soleil



Ces schémas montrent que le soleil joue aussi un rôle dans les marées (son effet est + faible que celui de la lune) mais il intervient dans le coefficient de marée.

Quand les axes Terre-lune et Terre-Soleil sont ⊥, les bourrelets liés à la lune et au soleil se compensent : la hauteur d'eau des marées basses et la hauteur des marées hautes sont voisines ; marées de faible coefficient ou marées de morte-eaux.

Quand les axes Terre-lune et Terre-Soleil sont confondus, les effets de la lune et du soleil s'ajoutent : marées de forte amplitude ou de vive-eaux

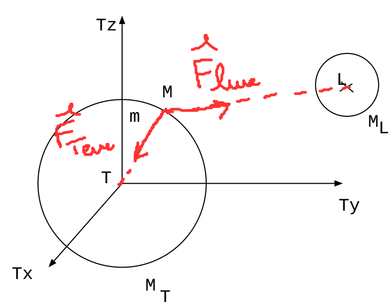
3. Modèle statique des marées

Le phénomène de marée est dû aux forces gravitationnelles exercées par la Lune et le Soleil sur la Terre. Ces forces déforment la surface des océans pour créer deux bourrelets.

On cherche à établir une théorie pour expliquer la présence de ces deux bourrelets. Pour cela, on fait l'hypothèse suivante : le système Terre Lune est isolé. On étudie le mouvement d'une particule fluide dans l'océan (de position M et de masse m) dans le référentiel géocentrique.

Le référentiel géocentrique est en translation circulaire dans le réf. de Copernic galiléen donc il n'est pas galiléen. M subit : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(T)_{R_c}$ et $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$

Dans le référentiel géocentrique, M subit:

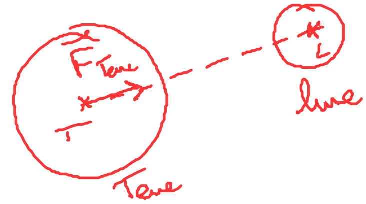


- l'attraction de la Terre :
  $$\vec{F}_{Terre} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{TM^2}\vec{u}_{T\to M} \qquad \vec{u}_{T\to M} = \frac{\vec{TM}}{TM}$$
- l'attraction de la lune
  $$\vec{F}_{lune} = -\mathcal{G}\frac{mM_L}{LM^2}\vec{u}_{L\to M} \qquad \vec{u}_{L\to M} = \frac{\vec{LM}}{LM}$$
- la force d'inertie d'entraînement :
  $$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(T)_{R_c}$$

On applique la RFD à la Terre dans le référentiel de Copernic:

$$M_T \vec{a}(T)_{R_c} = -\mathcal{G}\frac{M_T M_L}{LT^2}\vec{u}_{L\to T}$$

$$\text{soit } \vec{a}(T)_{R_c} = -\mathcal{G}\frac{M_L \vec{LT}}{LT^2}$$

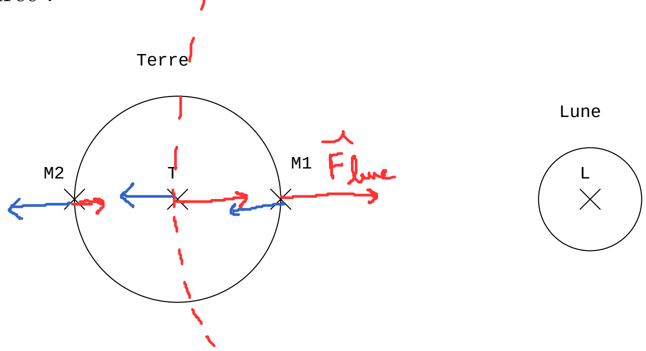


On applique la RFD à la particule fluide M dans le référentiel géocentrique:

$$\text{d'où } m\vec{a}(M)_{R_g} = \underbrace{-\mathcal{G}\frac{mM_T}{TM^3}\vec{TM}}_{\text{poids de la particule}} \underbrace{-\mathcal{G}\frac{mM_L}{LM^3}\vec{LM} + \mathcal{G}\frac{mM_L}{LT^3}\vec{LT}}_{\text{terme de marée qui comprend l'attraction de la lune ajoutée de la force d'inertie d'entraînement}}$$

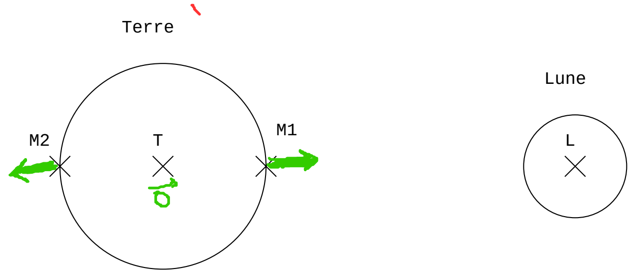
Analyse du terme de marée :

trajectoire de la Terre / Lune



→ attraction de la lune

→ $\vec{F}_{ie}$: elle est la même en tout point (au centre de la Terre : l'attraction de la lune et $\vec{F}_{ie}$ se compensent car dans R_g, la Terre est immobile)



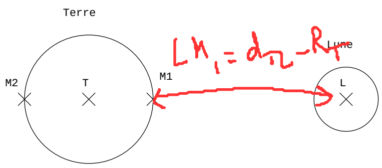
→ c'est la somme de $\vec{F}_{ie}$ et $\vec{F}_{lune}$

on voit donc que M_1 est comme attiré par la lune et M_2 repoussé par la lune

M_1 et M_2 sont à marée haute

Données : Constante de gravitation : $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\ SI$, $1\ u.a. = 149,6.10^{6}\ km$, $M_S = 1,989.10^{30}\ kg$, $M_L = 7,348.10^{22}\ kg$, $M_T = 5,974.10^{24}\ kg$, $R_T = 6370\ km$, distance Terre-Lune $3,844.10^{5}\ km$, distance Terre-Soleil $1\ u.a.$.

Ordre de grandeur du terme de marée lié à la lune en M_1: $\delta(M_1) = \left| \mathcal{G}\frac{M_L}{LM_1^2} - \mathcal{G}\frac{M_L}{TL^2} \right|$



$$\delta(M_1) = \left\| \frac{\vec{F}_{lune} + \hat{F}_{ie}}{m} \right\|$$

$$\delta(M_1) = \mathcal{G} M_L \left| \frac{1}{(d_{TL} - R_T)^2} - \frac{1}{d_{TL}^2} \right|$$

$$= \frac{\mathcal{G} M_L}{d_{TL}^2} \left| \left(1 - \frac{R_T}{d_{TL}}\right)^{-2} - 1 \right|$$

$$= \frac{\mathcal{G} M_L}{d_{TL}^2} \left| \cancel{1} + 2\frac{R_T}{d_{TL}} - \cancel{1} \right|$$

$$\delta_{lune}(M_1) = 2\mathcal{G}\frac{M_L R_T}{d_{TL}^3} = 1,1.10^{-6}\ m s^{-2} \ll g_0 = 9,8\ m s^{-2}$$

Ordre de grandeur du terme de marée lié au soleil : $\delta_{soleil}(M_1) = 2\mathcal{G}\frac{M_S R_T}{d_{TS}^3} = 5,1.10^{-7}\ m s^{-2} = \frac{1}{2}\delta_{lune}(M_1)$

l'effet lié au soleil est bien 2 fois plus faible que celui lié à la lune.

Pourquoi les principaux acteurs sont le soleil et la lune ?

la lune car elle est très proche (force en $1/r^2$)

le soleil car il est très lourd (force proportionnelle à m)