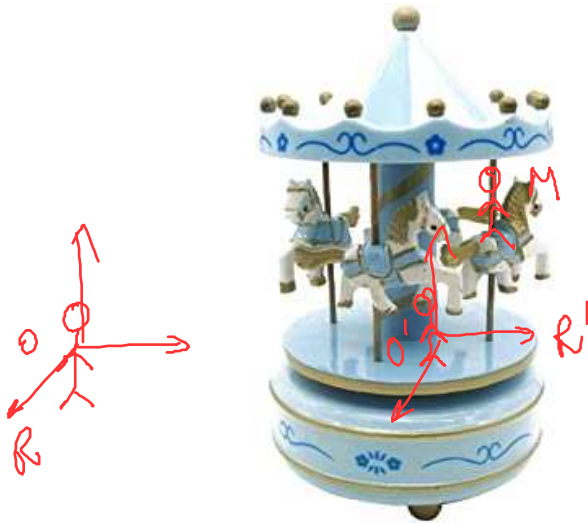


Ch M1 : Cinématique des changements de référentiel

Mise en situation:



On compte trois protagonistes:

- un point M dont on étudie le mouvement
- un observateur O fixe sur le sol
- un observateur O' fixe sur le manège

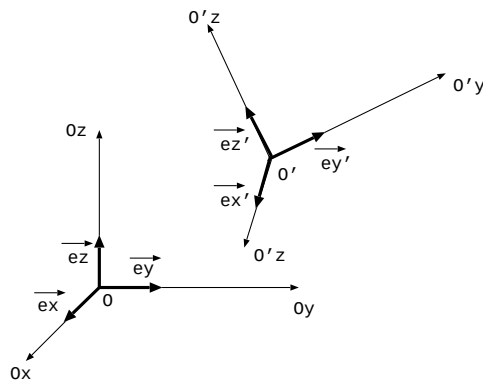
Les observateurs permettent de définir deux référentiels composés chacun de:

- une origine
- trois axes que l'on choisit perpendiculaires entre eux
- une chronologie : en mécanique classique, le temps s'écoule de la même façon dans tous les référentiels donc on omet de parler de la chronologie lorsque l'on définit le référentiel.

On note : $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: réf. fixe

$\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$: réf. mobile dans $\mathcal{R}$

Les notations



Coordonnées du vecteur $\vec{OM}$ dans $\mathcal{R}$: (x, y, z)

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Coordonnées du vecteur $\vec{O'M}$ dans $\mathcal{R}'$: (x', y', z')

$$\vec{O'M} = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}$$

I. Mouvements absolu, relatif et d'entraînement

On appelle mouvement absolu, le mouvement de M par rapport à $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}(M)_R = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_R$$

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}(M)_R = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \Big|_R$$

On appelle mouvement relatif, le mouvement de M par rapport à $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$.

$$\vec{v}_r(M) = \vec{v}(M)_{R'} = \frac{d\vec{O'M}}{dt} \Big|_{R'}$$

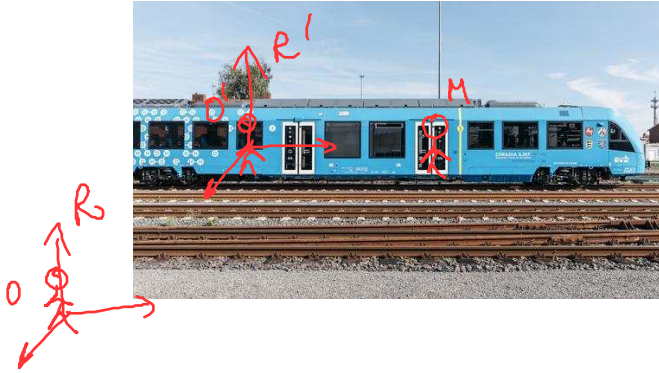
$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}(M)_{R'} = \frac{d^2\vec{O'M}}{dt^2} \Big|_{R'}$$

Il existe une relation simple entre les vitesses absolue et relative, essayons de trouver intuitivement cette relation en considérant l'exemple d'une personne qui marche dans un train:

Soit $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le référentiel fixe lié à un observateur sur le sol.

Soit $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$, le référentiel mobile lié à un observateur immobile dans le train.

Soit M une personne qui se déplace dans le train.



$$\vec{v}(M)_R = \vec{v}(M)_{R'} + \vec{v}(O')_R$$

réf. de la personne par rapport au sol
réf. de la personne par rapport au train
réf. du train par rapport au sol

soit $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M) :$ cette loi s'appelle la loi de composition des vitesses

On appelle mouvement d'entraînement, le mouvement du point coïncident M_c qui à un instant t , est superposé à M et qui aux instants ultérieurs reste immobile dans $\mathcal{R}'$ (alors que M continue à se déplacer dans $\mathcal{R}'$) et mobile dans $\mathcal{R}$. Le point coïncident est immobile dans $\mathcal{R}'$, il est mobile dans $\mathcal{R}$ car il est entraîné par le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$.

soit $\vec{v}_e(M) = \vec{v}(M_c)_R = \frac{d\vec{OM}_c}{dt} |_R$

et $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(M_c)_R = \frac{d^2\vec{OM}_c}{dt^2} |_R$

Remarques :

- Représentation : un enfant assimilé à un point matériel M se déplace dans $\mathcal{R}'$ avec un feutre dans sa main. A un instant t , il marque au feutre sa position dans $\mathcal{R}'$ puis il continue son chemin. Cette marque est immobile dans $\mathcal{R}'$ et mobile dans $\mathcal{R}$, c'est un point coïncident. Il renouvelle l'expérience plusieurs fois, chaque marque est un nouveau point coïncident.
- Il existe une infinité de points coïncidents M_c qui correspondent aux différentes positions de M à différents instants.

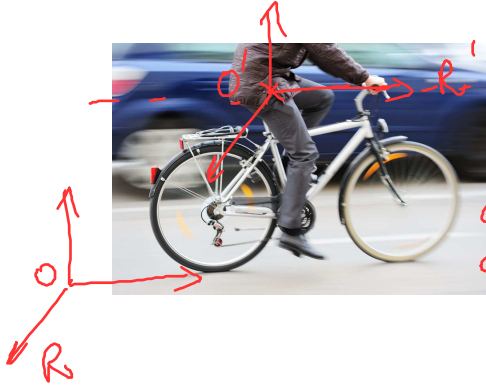
II. Le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$

Le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ dépend du mouvement des axes de $\mathcal{R}'$ par rapport à ceux de $\mathcal{R}$ et du mouvement de l'origine O' de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$. On distingue deux cas:

- Les axes de $\mathcal{R}'$ sont parallèles à ceux de $\mathcal{R}$ à tout instant: on dit alors que $\mathcal{R}'$ est en translation dans $\mathcal{R}$
- Les axes de $\mathcal{R}'$ tournent dans $\mathcal{R}$: on dit alors que $\mathcal{R}'$ est en rotation dans $\mathcal{R}$

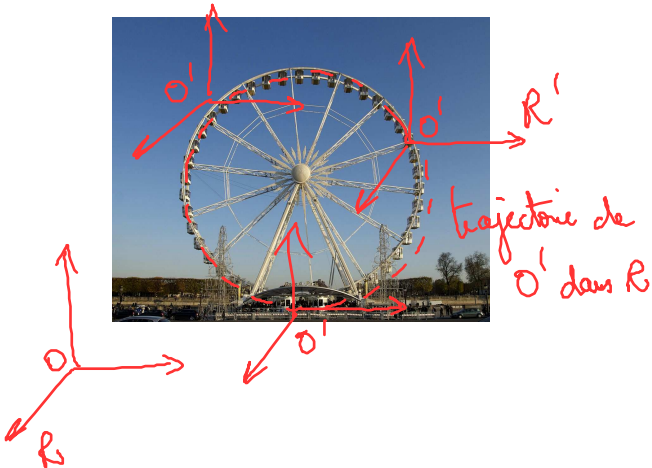
Exemples:

Vélo roulant à vitesse constante sur une ligne droite: $\mathcal{R}$ est le référentiel fixe lié à un observateur sur le sol et $\mathcal{R}'$ est le référentiel mobile lié au cycliste.



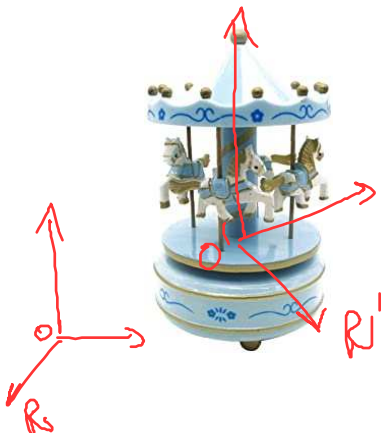
$\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$
 les axes de $\mathcal{R}'$ sont // à ceux de $\mathcal{R}$
 O' décrit une droite à vitesse constante dans $\mathcal{R}$

La grande roue tournant à vitesse constante: $\mathcal{R}$ est le référentiel fixe lié à un observateur sur le sol et $\mathcal{R}'$ est le référentiel mobile lié à une personne assise dans une nacelle.



$\mathcal{R}'$ est en translation circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$
 les axes de $\mathcal{R}'$ sont // à ceux de $\mathcal{R}$
 O' décrit un cercle à vitesse constante dans $\mathcal{R}$

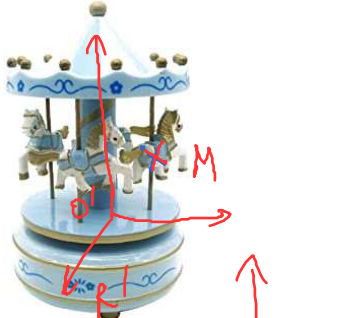
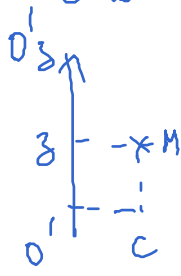
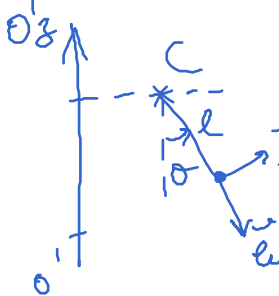
Manège tournant à vitesse constante: $\mathcal{R}$ est le référentiel fixe lié à un observateur sur le sol et $\mathcal{R}'$ est le référentiel mobile lié à une personne immobile sur le manège.



$\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme dans $\mathcal{R}$
 les axes de $\mathcal{R}'$ tournent par rapport à ceux de $\mathcal{R}$
 les axes tournent à vitesse constante

III. Le mouvement relatif

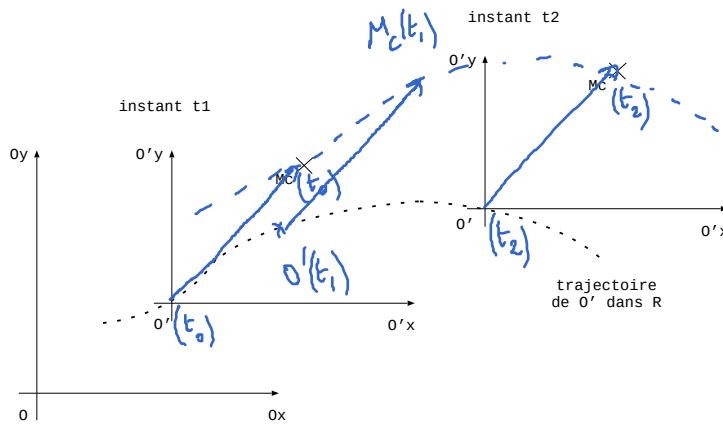
Le mouvement relatif est le mouvement de M dans le référentiel mobile $\mathcal{R}'$. Il dépend de la situation étudiée. Pour le trouver, on se pose la question : quel est le mouvement de M pour un observateur immobile dans $\mathcal{R}'$? Dans les exercices que nous aborderons, le mouvement relatif est soit rectiligne (dans ce cas, on utilise les coordonnées cartésiennes pour le décrire), soit circulaire (dans ce cas, on utilise les coordonnées polaires pour le décrire).

Exemples	Le référentiel $\mathcal{R}'$	Mouvement relatif de M
 M est un point de la roue	$\mathcal{R}$: référentiel fixe lié au sol $\mathcal{R}'$: référentiel mobile lié au cycliste	M décrit un cercle dans $\mathcal{R}'$ on étudie son m^u en coord. planes  $\vec{OM} = a \vec{e}_r$ $\vec{v}_{(M/\mathcal{R}')} = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ $\vec{a}_{(M/\mathcal{R}')} = a \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - a \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$
 M est un cheval	$\mathcal{R}$: référentiel fixe lié au sol $\mathcal{R}'$: référentiel mobile lié au manège	M décrit une droite dans $\mathcal{R}'$ on étudie son m^u en coord. cartésiennes  $\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$ $= \vec{O'C} + z \vec{e}_y$ $\vec{v}_{(M/\mathcal{R}')} = \dot{z} \vec{e}_y$ $\vec{a}_{(M/\mathcal{R}')} = \ddot{z} \vec{e}_y$
 M est un avion	$\mathcal{R}$: référentiel fixe lié au sol $\mathcal{R}'$: référentiel mobile lié au manège	M décrit un cercle. On étudie le m^u de M en planes  $\vec{OM} = \vec{OC} + l \vec{e}_r$ $\vec{v}_{(M/\mathcal{R}')} = l \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ $\vec{a}_{(M/\mathcal{R}')} = l \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - l \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$

IV. Le mouvement d'entraînement

Le mouvement d'entraînement est le mouvement d'un point coïncident : point superposé à M à un instant t qui est immobile dans $\mathcal{R}'$ et mobile dans $\mathcal{R}$ (il se laisse entraîner par le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$). On cherche l'expression de $\vec{v}_e(M)$ et $\vec{a}_e(M)$ dans les deux cas suivants:

Cas 1: quand $\mathcal{R}'$ est en translation dans $\mathcal{R}$:



M_c est fixe dans $\mathcal{R}'$
donc le vecteur $\vec{OM}_c$ est un vecteur fixe de $\mathcal{R}'$

la trajectoire de M_c dans $\mathcal{R}$ est // à celle de O' dans $\mathcal{R}$

On conclut que tous les points coïncidents ont dans $\mathcal{R}$ le même mouvement que celui de O' dans $\mathcal{R}$

Donc $\vec{v}_e(M) = \vec{v}(M_c)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(O')_{\mathcal{R}}$

et $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(M_c)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(O')_{\mathcal{R}}$

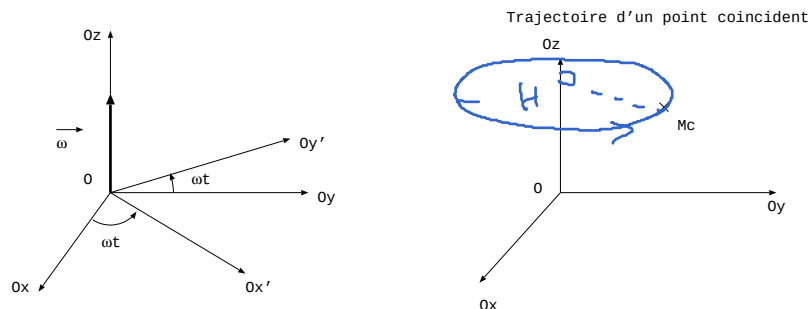
pu $\mathcal{R}'$ en translation dans $\mathcal{R}$, le vecteur d'entraînement est le vecteur de O' dans $\mathcal{R}$

Cas 2: quand $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de $\mathcal{R}$:

On limite l'étude au cas où $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme autour de l'axe Oz dans $\mathcal{R}$. On note donc $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $\mathcal{R}'(O, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$.

On note $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ le vecteur rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

ω s'exprime en rad.s⁻¹ c'est une constante.



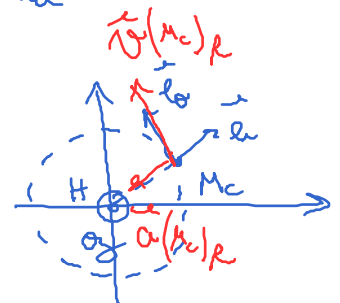
H est le projeté $\perp$ de M_c sur l'axe Oz
($H \in$ l'axe Oz et la droite HM_c est $\perp$ à (Oz))

Un point coïncident décrit un cercle de centre H et de rayon HM_c à la vitesse angulaire ω

$\vec{OM}_c = \vec{OH} + \vec{HM}_c$ et $\vec{OH} \wedge \vec{\omega} = \vec{0}$

Donc $\vec{v}_e(M) = \vec{v}(M_c)_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \times \vec{HM}_c = \vec{\omega} \wedge \vec{HM}_c = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}_c$

et $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(M_c)_{\mathcal{R}} = -\omega^2 \vec{HM}_c = -\omega^2 \vec{OM}_c$



Vue de dessus

V. Conclusion

On définit un référentiel fixe noté $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et un référentiel mobile noté $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$.

Le mouvement de M dans $\mathcal{R}$ s'appelle le mouvement absolu soit $\vec{v}_a(M) = \vec{v}(M)_R$
et $\vec{a}_a(M) = \vec{a}(M)_R$

Le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ s'appelle le mouvement relatif soit $\vec{v}_r(M) = \vec{v}(M)_{R'}$
et $\vec{a}_r(M) = \vec{a}(M)_{R'}$

Le mouvement relatif est toujours un mouvement simple à décrire : soit c'est un mouvement rectiligne et on le décrit en coordonnées cartésiennes, soit c'est un mouvement circulaire et on le décrit en coordonnées polaires.

Le mouvement d'entraînement désigne le mouvement d'un point coïncident, c'est un point superposé à M à un instant t qui reste immobile dans $\mathcal{R}'$ et mobile dans $\mathcal{R}$ aux instants ultérieurs.

Le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$

Lorsque les axes de $\mathcal{R}'$ sont parallèles à ceux de $\mathcal{R}$, on dit que $\mathcal{R}'$ est en translation dans $\mathcal{R}$.

Exemple: $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniformément accélérée dans $\mathcal{R}$ veut dire que les axes de $\mathcal{R}'$ sont // à ceux de $\mathcal{R}$ et que O' décrit une droite à accélération cte dans $\mathcal{R}$

Exemple: $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$ veut dire que les axes de $\mathcal{R}'$ sont // à ceux de $\mathcal{R}$ et que O' décrit une droite à vitesse cte dans $\mathcal{R}$

Lorsque les axes de $\mathcal{R}'$ tournent dans $\mathcal{R}$, on dit que $\mathcal{R}'$ est en rotation dans $\mathcal{R}$.

La loi de composition des vitesses s'écrit : $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$

La loi de composition des accélérations s'écrit : $\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$ ne pas oublier : c'est l'accélération de Coriolis

Les expressions de la vitesse d'entraînement, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis dépendent du mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{R'/R} = \omega \vec{e}_z$$

	$\mathcal{R}'$ en translation dans $\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$ en rotation dans $\mathcal{R}$
Mouvement du point coïncident	c'est le m ^{te} de O' dans $\mathcal{R}$	M_c décrit un cercle de centre H (point de (Oz) tq $HM_c \perp \vec{\omega}$ (Oz) et à vitesse angulaire ω
$\vec{v}_e(M)$	$\vec{v}(O')_R$	$\vec{\omega} \wedge \vec{OM}$
$\vec{a}_e(M)$	$\vec{a}(O')_R$	$-\omega^2 \vec{HM}$
$\vec{a}_c(M)$	$\vec{0}$	$2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(M)$