

Chapitre MF 1 : cinématique des fluides

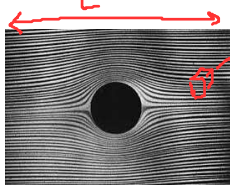
I. Outils pour décrire un fluide

1. Notion de particule fluide

Problématique : Un fluide est constitué de particules distantes les unes des autres qui interagissent entre elles. Il est impossible de le décrire en tenant compte du mouvement de chaque molécule, d'une part car le nombre de molécules en interaction est trop important et d'autre part car à l'échelle de la molécule (échelle microscopique) ce milieu est discontinu.

On distingue trois échelles de longueur dans un fluide:

Echelle macroscopique



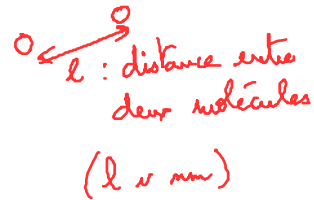
L : taille du système ($L \approx m$)

Echelle mésoscopique



a : taille d'une particule fluide ($a \approx mm$)

Echelle microscopique



($l \approx nm$)

Il est toujours possible de choisir a (taille de la particule fluide) tel que $l \ll a \ll L$.

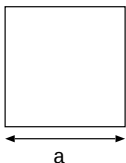
La condition $l \ll a$ signifie qu'il y a un grand nombre de molécules dans une particule fluide, on peut donc adopter une méthode statistique pour décrire la particule fluide. La vitesse de la particule fluide est égale à la vitesse moyenne de l'ensemble des molécules qui constituent la particule fluide, et la valeur moyenne a du sens lorsqu'on l'effectue sur un grand nombre de molécules. Il en est de même pour la pression, la température, la masse volumique...

La condition $a \ll L$ signifie que d'une particule fluide à l'autre les grandeurs pression, température, masse volumique, ...varient et elles varient de manière continue.

Conclusion: On décrit donc le fluide en le décomposant en particule fluide M de volume $d\tau$ et de masse $dm = \rho d\tau$. Cette description est continue.

Que devient une particule fluide au cours de son mouvement?

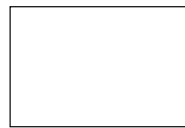
particule fluide au repos



variation de volume

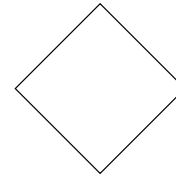


compression

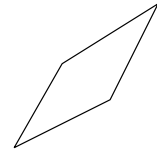


dilatation

rotation



déformation



(les déformations ne sont pas étudiées dans ce chapitre)

2. Approche Eulérienne

L'approche Eulérienne consiste à fixer une position dans l'espace et au cours du temps on observe les variations de la pression, de la température, de la vitesse en ce point. Dans cette approche ce n'est jamais la même particule fluide que l'on observe.

On note $P(M, t)$, $\rho(M, t)$, $\vec{V}(M, t)$ où M est un point fixé. Lorsque l'on dérive ces grandeurs par rapport au temps, M est fixé, on fait des dérivées partielles. On note:

$\frac{\partial P}{\partial t}(M, t)$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t)$, $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}(M, t)$: sont des dérivées locales, M est fixé et on étudie la variation de ces grandeurs au cours du temps

3. Approche Lagrangienne

L'approche Lagrangienne consiste à suivre une particule fluide au cours de son mouvement. On note $P(M, t)$, $\rho(M, t)$, $\vec{V}(M, t)$ où M est la particule fluide que l'on suit au cours du temps.

Exemple: un parachutiste fait un saut en amenant avec lui un thermomètre: on étudie l'écoulement de l'air autour du parachutiste. Que lit on sur le thermomètre?

La température lue sur le thermomètre augmente au cours du saut car la température dépend de l'altitude: il fait plus chaud à basse altitude. La variation de température ici est liée à la présence d'un gradient de température (T n'est pas homogène dans l'atmosphère) et au déplacement du thermomètre. Donc T varie d'autant plus vite que $\|\vec{\text{grad}} T\|$ est grand et que le parachutiste va vite ($\|\vec{V}\|$ grande)

Dérivée particulaire d'un champ scalaire: $\frac{dT}{dt}(M, t) = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}(M, t)}_{\text{dérivée locale (M fixé)}} + \underbrace{\vec{\text{grad}} T(M, t) \cdot \vec{V}(M, t)}_{\text{dérivée convective liée au vect de l'air}} = \frac{DT}{Dt}$

Autre exp: $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} p$

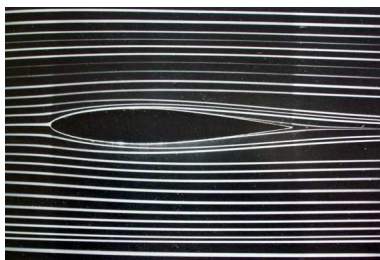
Dérivée particulaire d'un champ de vitesse: cas de l'accélération:

$\vec{a}(M, t) = \frac{D\vec{V}}{Dt}(M, t) = \underbrace{\frac{d\vec{V}}{dt}(M, t)}_{\text{dérivée locale (M fixée)}} + \underbrace{(\vec{V}(M, t) \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{V}(M, t)}_{\text{dérivée convective}}$

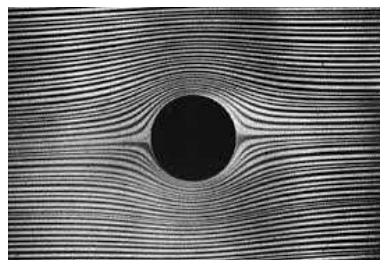
⚠ à la position des parenthèses car $\vec{\text{grad}} \vec{V}$ n'existe pas

4. Lignes de courant

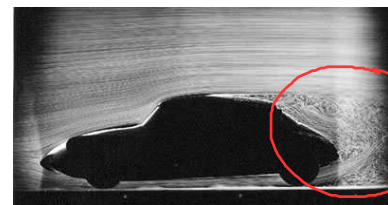
Une ligne de courant est, à un instant donné, une ligne tangente au vecteur vitesse en tout point. Les lignes de courant sont orientées dans le sens du vecteur vitesse.



écoulement de l'air autour d'une aile d'avion



écoulement d'eau autour d'un cylindre (bateau)



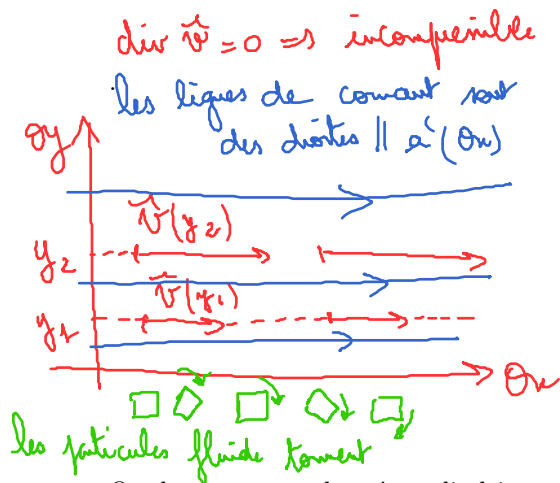
zone de turbulence (non stationnaire)

écoulement d'air autour de la voiture

En régime permanent les lignes de courant sont les mêmes à tout instant, dans ce cas les lignes de courant sont confondues avec les trajectoires des particules fluide

Equations des lignes de courant: on a $\vec{V} = \alpha d\vec{OM}$ (la vitesse est colinéaire au vecteur $d\vec{OM}$ qui donne la direction de la tangente)

soit $\begin{cases} V_x = \alpha dx \\ V_y = \alpha dy \end{cases}$ et $\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}$ on sépare les variables et on intègre entre x_0 et x , et y_0 et y (la ligne de courant trouvée passe par $M_0(x_0, y_0)$ et $M(x, y)$)



On donne en coordonnées cylindriques:

Le gradient : $\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$

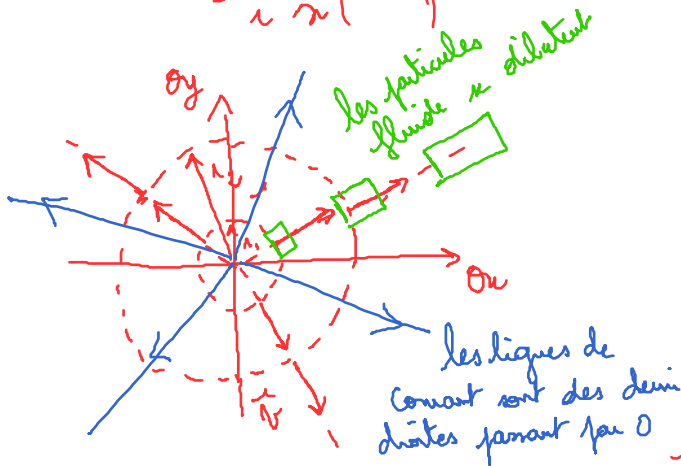
La divergence: $\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

Le rotationnel: $\vec{\text{rot}} \vec{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$

Exemple 3: $\vec{V} = \frac{V_0}{r} \vec{e}_r$. $V_r = V_0$ $V_\theta = 0$ $V_z = 0$

$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_0) = V_0 > 0$: dilatation

$\vec{\text{rot}} \vec{v} = \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \vec{e}_r = \vec{0}$: écoulement irrotationnel



$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

$\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} = \left(\frac{V_0}{r} \vec{e}_r \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = V_0 \frac{\partial}{\partial r}$

$(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = V_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_0}{r} \vec{e}_r \right) = \vec{0}$

$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{0}$

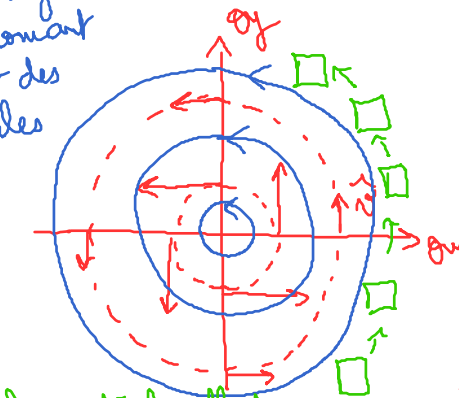
les particules fluide se déplacent à vitesse constante

Exemple 4: $\vec{V} = \frac{V_0}{r} \vec{e}_\theta$. ici $V_r = 0$ $V_\theta = \frac{V_0}{r}$ $V_z = 0$

$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$: incompressible

$\vec{\text{rot}} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) \vec{e}_z = \frac{1}{r^2} \vec{e}_z$: écoulement irrotationnel

les lignes de courant sont des cercles



$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$: stationnaire

$\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} = \left(\frac{V_0}{r} \vec{e}_\theta \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \frac{V_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$

$(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = \frac{V_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_0}{r} \vec{e}_\theta \right) = -\frac{V_0^2}{r^4} \vec{e}_r$

$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{V_0^2}{r^4} \vec{e}_r$

les particules fluide décrivent des cercles à vitesse constante, leur accélération est centripète

III. Conservation de la masse

1. Notion de débit volumique

♥ Définition : Le débit volumique est le volume de fluide qui traverse une section S par unité de temps. On note $\mathcal{D}_v = \frac{dV}{dt}$ où dV est le volume de fluide qui traverse S entre t et $t+dt$.
 On a aussi $[\mathcal{D}_v] = \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

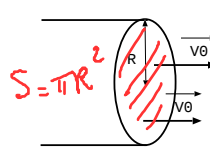
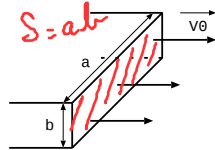
Expression : $D_v = \iint \vec{V}(M) \cdot dS \vec{n}(M)$: le débit volumique est le flux du vecteur intensité à travers une surface.

On retient et on applique dans les exercices : $\mathcal{D}_v = \iint v(M) dS(M)$ avec M un point de la surface perpendiculaire à $\vec{v}$ à travers laquelle on calcule le débit volumique.



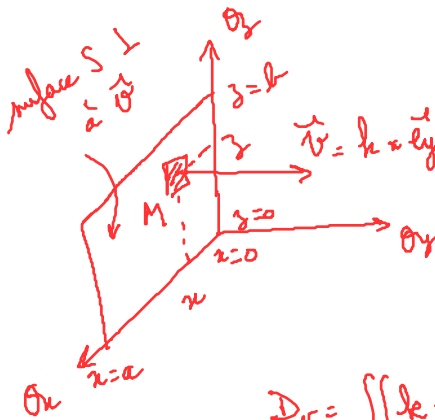
Cas particulier d'un écoulement uniforme : $\mathcal{D}_v = V \cdot S$ si la intensité est uniforme on fait la sortie de l'intégrale : $\mathcal{D}_v = \int v dS = v \int dS = v \cdot S$

$$\mathcal{D}_v = v_0 ab$$



$$\mathcal{D}_v = v_0 \times \pi R^2$$

Exercice : soit un écoulement de la forme $\vec{V} = kx\vec{e}_y$. On considère une section S dans le plan Oxz comprise entre $x = 0$ et $x = a$, et entre $z = 0$ et $z = b$. Calculer le débit volumique de cet écoulement à travers la section S .



Ici la intensité n'est pas uniforme car elle dépend de x donc on doit calculer : $\mathcal{D}_v = \iint v(M) \cdot dS(M) = \iint kx dS$

Il faut alors exprimer dS qui dépend de la situation étudiée et des conditions utilisées. On trouve dS , on se pose la question : par quelles variables est repérée un point M sur la surface ? Ici M est repéré par x et z donc $dS = dx \times dz$ d'où :

$$\mathcal{D}_v = \int_{z=0}^b \int_{x=0}^a kx dx dz = \int_{z=0}^b kx \frac{a^2}{2} dz = k \frac{a^2}{2} \times b$$

Exercice : soit un écoulement de la forme $\vec{V} = V_0(1 - \frac{r}{R})\vec{e}_z$ en coordonnées cylindriques. Calculer le débit volumique à travers un disque de rayon R perpendiculaire à l'écoulement.

Ici la intensité n'est pas homogène donc on ne peut pas la sortir de l'intégrale il faut donc calculer : $\mathcal{D}_v = \iint v(M) dS(M)$

On cherche l'expression de $dS(M)$ en se posant la question : par quelles variables est repéré M sur S ? Ici M est repéré par r et θ .

Quand on varie de dr et θ varie de $d\theta$, cela fait apparaître deux longueurs : dr et $r d\theta$ d'où $dS = dr \times r d\theta$

$$\mathcal{D}_v = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} V_0(1 - \frac{r}{R}) dr \times r d\theta = V_0 \int_{r=0}^R (1 - \frac{r}{R}) r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta$$

$$\mathcal{D}_v = V_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R} \right) 2\pi = \frac{2\pi V_0 R^2}{6} = \frac{\pi V_0 R^2}{3}$$

2. Notion de débit massique

B | Définition : le débit massique est la masse de fluide qui traverse une surface S par unité de temps. On note : $\boxed{D_m = \frac{dm}{dt}}$ où dm est la masse qui traverse S entre t et $t+dt$

Expression : $D_m = \iint \rho(M) \vec{V}(M) \cdot dS \vec{n}(M)$ on retient : $\boxed{D_m = \int \rho(M) v(M) dS(M)}$ où M est un point de la surface S et $\vec{v}$ c'est le flux du vecteur $\vec{v}$ à travers S

Cas particulier d'un écoulement uniforme et incompressible : $\boxed{D_m = \rho \cdot V \cdot S}$ cas où ρ et v sont constantes, on peut les sortir de l'intégrale

Exemple 1 : soit une canalisation à section circulaire de rayon $R = 5 \text{ cm}$ dans laquelle s'écoule de l'eau à la vitesse $V = 1 \text{ m/s}$. Calculer la masse d'eau qui traverse une section de cette canalisation pendant 10 minutes.

On peut calculer le débit massique d'eau : $D_m = \rho \times \pi R^2 \times v = 10^3 \times \pi (5 \cdot 10^{-2})^2 \times 1 = 7,8 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

ou $D_m = \frac{m}{dt}$ où m est la masse d'eau qui traverse S pendant dt
soit $m = D_m \times dt = 7,8 \times 10 \times 60 = 4680 \text{ kg}$

Exemple 2 : soit une canalisation circulaire de diamètre $d_1 = 20 \text{ cm}$ dans lequel s'écoule un liquide de vitesse $V_1 = 1 \text{ m/s}$. Le diamètre de la canalisation est divisé par 2 tout en conservant le même débit volumique, calculer la vitesse V_2 .

$D_v = V_1 \times S_1 = V_2 \times S_2$ soit $V_2 = V_1 \frac{S_1}{S_2} = V_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 4 V_1$
avec $S_1 = \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2$
 $S_2 = \pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$
 $d_1 = 2 d_2$

Exemple 3 : remplir un seau de 5 litres d'eau prend une minute au robinet de la cuisine. Estimer la vitesse de l'eau au niveau du robinet.

$D_v = \frac{V}{dt} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{60} = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ On $D_v = V \times \pi R^2$
on choisit pour le robinet : $R \approx 1 \text{ cm}$
d'où $V = \frac{D_v}{\pi R^2} = \frac{8,3 \cdot 10^{-5}}{\pi \cdot (10^{-2})^2} = 0,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3. Equation locale de conservation de la masse

Rappel : Théorème d'Ostrogradsky : le flux sortant d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue à tout le volume intérieur à la surface fermée.

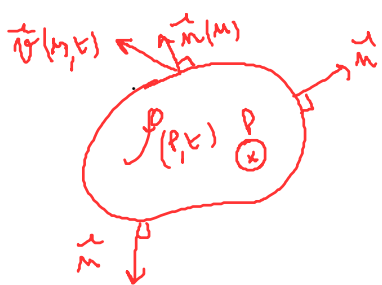
$\iiint \vec{A}(M) \cdot dS \vec{n}(M) = \iiint \text{div } \vec{A}(P) d\tau(P)$
 $M \in \text{à la surface fermée}$ $\vec{n}$ normale sortante
 P est un point dans le volume délimité par la surface fermée



On montre la loi de conservation de la masse en considérant un volume V délimité par une surface fermée S . On note $f(M, t)$: la masse volumique du fluide
 $\vec{v}(M, t)$: la vitesse du fluide

On se place en régime variable.

P un point dans le volume, M un point de la surface



masse présente dans le volume :

$$\text{à } t : m(t) = \iiint_V \rho(P, t) dV$$

$$\text{à } t + dt : m(t + dt) = \iiint_V \rho(P, t + dt) dV$$

masse qui sort du volume entre t et $t + dt$: $\Delta m_s = \Delta m_s \times dt$

$$\Delta m_s = \oint_S \rho(M, t) \vec{v}(M, t) \cdot d\vec{S}(M) \vec{n}(M) \times dt$$

on transforme ce terme avec Ostrogradsky

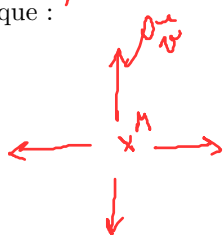
La conservation de la masse s'écrit : $m(t + dt) = m(t) - \Delta m_s$

$$\iiint_V \rho(P, t + dt) dV = \iiint_V \rho(P, t) dV - \oint_S \rho(M, t) \vec{v}(M, t) \cdot d\vec{S}(M) \vec{n}(M) \times dt$$

$$\text{on } \iiint_V \underbrace{[\rho(P, t + dt) - \rho(P, t)]}_{\frac{\partial \rho}{\partial t} \times dt} dV + \iiint_V \text{div}(\rho(P, t) \vec{v}(P, t)) dV \times dt = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0} \quad \beta$$

Signification physique :

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho \vec{v}) &> 0 \\ \text{soit } \frac{\partial \rho}{\partial t} &< 0 \\ \text{soit } \rho &< 0 \end{aligned}$$



le fluide sort du point M donc en M il y a moins de matière

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho \vec{v}) &< 0 \\ \text{soit } \frac{\partial \rho}{\partial t} &> 0 \\ \text{et } \rho &> 0 \end{aligned}$$

de la matière arrive vers M

IV. Différents modèles d'écoulement

1. Ecoulement incompressible

Définition: Un écoulement est dit incompressible lorsque toute particule fluide garde une masse volumique constante au cours de son déplacement.

Mathématiquement on l'écrit : $\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 0}$ (dans la dérivée c'est une "d dérivée")

Attention : Il est important de distinguer la notion de fluide incompressible et d'écoulement incompressible.

Les liquides sont des fluides incompressibles, ils sont donc en écoulement incompressible.

Les gaz sont des fluides compressibles. On admet qu'ils sont en écoulement incompressible dans le cas où la vitesse des particules fluide est inférieure à la vitesse du son dans le gaz concerné. Dans ce cas, le fluide est compressible en écoulement incompressible.

Exemples : une voiture se déplaçant dans l'air à 100 km/h

vitesse du son dans l'air : $C = 340 \text{ ms}^{-1}$

$$V = \frac{100 \times 1000}{3600} = 28 \text{ ms}^{-1} < 340 \text{ ms}^{-1} \text{ donc l'écoulement de l'air autour de la voiture est incompressible}$$

un avion se déplaçant à une vitesse de 1000 km/h.

$$V = \frac{1000 \times 1000}{3600} = 280 \text{ ms}^{-1} < 340 \text{ ms}^{-1} \text{ donc l'écoulement de l'air autour de l'avion est incompressible}$$

Conséquence 1 : Equation locale caractéristique d'un écoulement incompressible:

$$\text{Un écoulement incompressible vérifie : } \frac{d\rho}{dt} = 0 \text{ avec } \frac{d\rho}{dt} = \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \rho} = 0 \quad \text{(dérivée particulaire)} \quad (*)$$

$$\text{On écrit la loi de conservation de la masse : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (*)$$

$$\text{les mathématiciens nous disent que : } \text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \rho$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \rho} = 0 \quad (*)$$

$$\text{d'où } \boxed{\text{div} \vec{v} = 0} \text{ pour un écoulement incompressible} \quad \beta$$

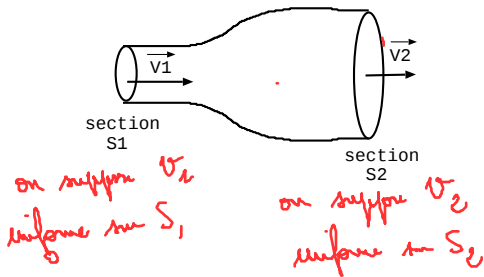
Conséquence 2 : Equation intégrale caractéristique d'un écoulement incompressible:

On applique le théorème d'Osborne :

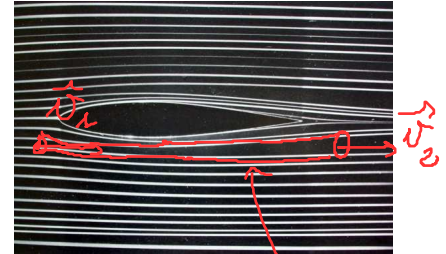
$$\oint_S \vec{v}(M) dS(M) \vec{n}(M) = \iiint_V \underbrace{\text{div}(\vec{v}(P))}_{=0 \text{ pour un écoulement incompressible}} dV(P) = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\oint_S \vec{v}(M) dS(M) \vec{n}(M) = 0}$$

soit le flux de $\vec{v}$ à travers une surface fermée est nul : on retient que le débit volumique se conserve pour un écoulement incompressible

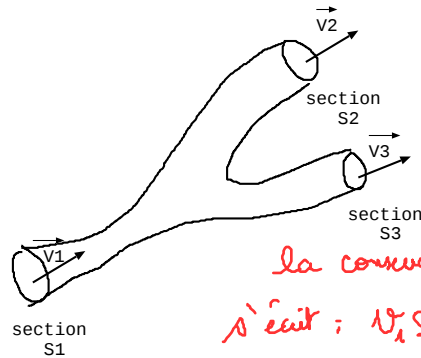
Exemples:



le débit volumique entrant = le débit volumique sortant car le débit volumique se conserve
soit $\boxed{v_1 \times S_1 = v_2 \times S_2}$



on appelle ce "tuyau fictif" un tube de courant, on écrit la conservation du débit volumique : $v_1 S_1 = v_2 S_2$
ici $S_1 < S_2$ donc $v_2 < v_1$



la conservation du débit volumique s'écrit : $v_1 S_1 = v_2 S_2 + v_3 S_3$

|| quand les lignes de courant s'écartent la vitesse diminue

2. Ecoulement stationnaire

Définition : Un écoulement est dit stationnaire lorsque $\rho, \mu, T, \vec{v} \dots$ ne dépendent pas du temps.

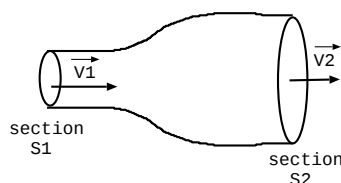
Mathématiquement on écrit : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$
(ce sont des dérivées locales aux des "d rond")

Conséquence 1 : équation locale caractéristique d'un écoulement stationnaire:

On écrit la loi de conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{div}(\rho \vec{v}) = 0}$ pour un écoulement stationnaire

Conséquence 2 : équation intégrale caractéristique d'un écoulement stationnaire:

On applique le th. d'Osborne : $\oint_S \rho(M) \vec{v}(M) dS(M) \vec{n}(M) = \iiint_V \underbrace{\text{div}(\rho(P) \vec{v}(P))}_{=0 \text{ écoulement stationnaire}} dV(P) = 0$ donc $\boxed{\oint_S \rho(M) \vec{v}(M) dS(M) \vec{n}(M) = 0}$



$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$
débit masse entrant = débit masse sortant

le flux sortant de $\rho \vec{v}$ est nul à travers une surface fermée, cela veut dire que le débit masse est conservé

3. Écoulement rotationnel ou tourbillonnaire

Définition : Un écoulement est rotationnel lorsqu'il existe au moins un point de l'espace où le vecteur tourbillon : $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$ n'est pas nul.

4. Écoulement irrotationnel

B // Définition : Un écoulement est irrotationnel lorsque les particules fluides ne tournent pas sur elles-mêmes ce que l'on traduit par $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ en tout point du fluide.

Conséquence : on rappelle la propriété mathématique sur les opérateurs, pour tout champ scalaire V on a : $\text{rot}(\text{grad } V) = \vec{0}$. Ici on a $\text{rot } \vec{v}(M) = \vec{0}$

Donc il existe ϕ tel que $\vec{v} = \text{grad } \phi$ qui vérifie bien $\text{rot}(\text{grad } \phi(M)) = \vec{0}$

ϕ appelé potentiel scalaire des vitesses

Cas particulier d'un écoulement incompressible et irrotationnel: le champ des vitesses vérifie les équations:

écoulement incompressible : $\text{div } \vec{v} = 0$

irrotationnel : $\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{grad } \phi \Rightarrow \text{div}(\text{grad } \phi) = 0$
soit $\Delta \phi = 0$ équation de Laplace

$$\text{gradient : } \vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{divergence : } \text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rotationnel : } \vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\text{laplacien scalaire : } \Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial V}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Exemple 1 : soit un écoulement de potentiel des vitesses $\phi(r) = A \ln r$ en coordonnées cylindriques. Vérifier que cet écoulement est bien un écoulement incompressible irrotationnel et exprimer le champ des vitesses associé.

On un écoulement incompressible et irrotationnel on doit avoir $\Delta \phi = 0$. vérifions le par le calcul.

$$\Delta \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{A}{r} \right) = 0$$

ϕ ne dépend ni de θ ni de z

$$\text{on a : } \vec{v} = \text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{A}{r} \vec{e}_r$$

Exemple 2 : soit un écoulement de champ de vitesses $\vec{V} = \frac{A}{r} \vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques. Vérifier qu'il est irrotationnel et incompressible et exprimer ϕ le potentiel des vitesses associé.

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A}{r} \right) = 0 \rightarrow \text{écoulement incompressible}$$

$$\text{rot } \vec{V} = 0 \quad V_r = 0 \quad V_\theta = \frac{A}{r} \quad V_z = 0$$

$$\text{rot } \vec{V} = -\frac{V_\theta}{r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \vec{e}_z = 0 \rightarrow \text{écoulement irrotationnel}$$

$$\phi \text{ est défini par } \vec{V} = \text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$V_r = 0 \quad V_\theta = \frac{A}{r} \quad V_z = 0$

$$\text{d'où } \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \Rightarrow \phi \text{ ne dépend ni de } r \text{ ni de } z \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{A}{r} \Rightarrow \frac{d\phi}{d\theta} = A \Rightarrow \boxed{\phi = A\theta + B}$$

Exemple 3 : pour un écoulement de irrotationnel et incompressible, on définit le potentiel des vitesses $\phi(r, \theta) = r^2 f(\theta)$ en coordonnées cylindriques. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(\theta)$ et la résoudre. En déduire le champ des vitesses.

ϕ doit vérifier $\Delta \phi = 0$ pour un écoulement incompressible et irrotationnel.

$$\Delta \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot 2r f(\theta)) + \frac{1}{r^2} r^2 f''(\theta)$$

$$= \frac{4}{r} f(\theta) + f''(\theta) = 0$$

d'où $f''(\theta) + 4f(\theta) = 0$: on reconnaît un oscillateur harmonique de pulsation $\sqrt{4} = 2$

$$\text{on } f(\theta) = A \cos(2\theta) + B \sin(2\theta)$$

$$\text{et } \phi(r, \theta) = r^2 A \cos(2\theta) + r^2 B \sin(2\theta)$$

$$\vec{V} = \text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$= 2r (A \cos(2\theta) + B \sin(2\theta)) \vec{e}_r + \frac{r^2}{r} (-2A \sin(2\theta) + 2B \cos(2\theta)) \vec{e}_\theta$$

on trouverait A et B avec les conditions aux limites que l'on n'a pas ici