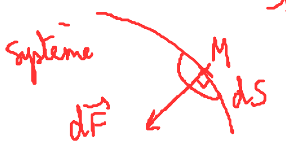
Chapitre MF 2 : dynamique des fluides

I. Les actions de contact dans un fluide en mouvement

1. Les forces de pression

La force de pression qu'exerce un fluide sur une surface dS en un point M où la pression est $P(M)$ est:



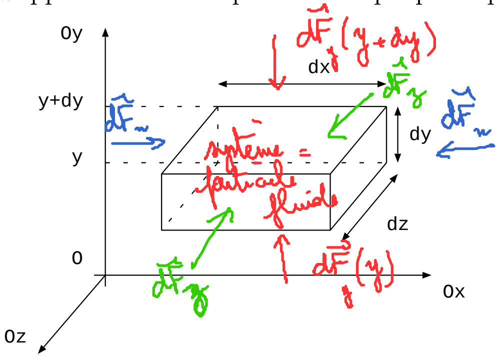
la force $\vec{dF}$ qu'exerce le fluide sur le système est ⊥ à la surface dirigée du fluide vers le système (direction, sens)

$\|\vec{dF}\| = P(M)\,dS$ (norme)

(le fluide tend à comprimer le système)

Pour étudier un écoulement fluide, on fait appel à la notion de particule fluide. Soit une particule fluide de volume $d\tau$ placée en M. Cette particule fluide subit les forces de pression exercées par le fluide environnant, cherchons l'expression de la résultante des forces de pression qu'elle subit. Pour cela on considère un particule fluide de volume élémentaire $d\tau = dxdydz$.

Supposons dans un premier temps que la pression du fluide s'écrit $P = P(y)$.



la pression ne dépend que de y donc les forces $\vec{dF}_x$ se compensent, de même pour les forces $\vec{dF}_z$

$\vec{dF}(y+dy) = -P(y+dy)\,dx\,dz\,\vec{e_y}$ (force dirigée du fluide vers le système)

$\vec{dF}(y) = +P(y)\,dx\,dz\,\vec{e_y}$

La résultante des forces de pression est donc :

$$\vec{dF} = -\left[P(y+dy) - P(y)\right] dx\,dz\,\vec{e_y} = -\frac{dP}{dy}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{d\tau\ :\ \text{volume de la particule fluide}}\vec{e_y}$$

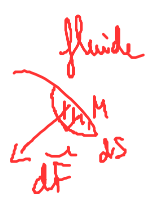
Que devient l'expression de la force pour $P = P(x)$? $\vec{dF} = -\frac{dP}{dx} \times d\tau\,\vec{e_x}$

Que devient l'expression de la force pour $P = P(z)$? $\vec{dF} = -\frac{dP}{dz} \times d\tau\,\vec{e_z}$

Que devient l'expression de la force pour $P = P(x, y, z)$? $\vec{dF} = -\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z}\right)}_{\vec{\text{grad}}\,P} \times d\tau = -\vec{\text{grad}}\,P \times d\tau$

On retient:

force de pression exercée sur une surface dS : $\|\vec{dF}\| = P(M)\,dS$



force de pression exercée sur un volume $d\tau$: $\boxed{\vec{dF}_p = -\vec{\text{grad}}\,P \times d\tau}$ B

2. Les forces de viscosité

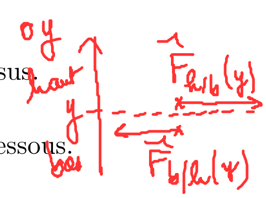
Dans un fluide visqueux, les couches de fluide ne peuvent pas glisser librement les unes par rapport aux autres. Elles exercent les uns sur les autres des forces de frottements qui s'opposent au mouvement relatif d'une couche par rapport à l'autre.

Pour un écoulement de la forme $\vec{v} = v_x(y)\vec{e_x}$, les forces de viscosité exercées sur un élément de surface dS s'écrivent :

Ces expressions sont données par l'énoncé

$\vec{dF}_{h/b}(y) = \eta \dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y) dS \vec{e_x}$: force exercée sur la couche de fluide en y par le fluide placé au dessus.

$\vec{dF}_{b/h}(y) = -\eta \dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y) dS \vec{e_x}$: force exercée sur la couche de fluide en y par le fluide placé au dessous.



(ces deux forces sont opposées d'après le principe de l'action et de la réaction)

Lien avec le phénomène de diffusion:

La force de viscosité est proportionnelle à $\frac{\partial v}{\partial y}$. cette force existe quand il y a une inhomogénéité de vitesses, cette force est nulle quand la vitesse est homogène.
Les couches de fluide "adhèrent" les unes aux autres dans un fluide visqueux. Ainsi les couches de fluide rapides entraînent les couches de fluide plus lentes et les couches de fluide lentes retiennent les couches de fluide rapide.

Le coefficient η est une constante positive appelée viscosité ou viscosité dynamique du fluide

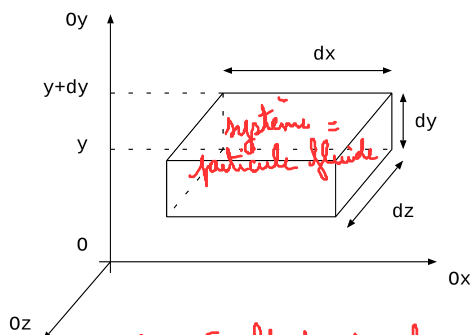
Son unité est le poiseuille de symbole Pl ou $[\eta] = \left[\frac{dF}{dS\,\frac{\partial v}{\partial x}}\right] = \left[\frac{dF}{dS}\right]\left[\frac{dx}{dv}\right] = Pa \times s$

On donne la viscosité de l'eau, de l'air et de la glycérine aux conditions habituelles de pression et de température. Plus un fluide est visqueux et plus sa viscosité est grande. NB

Corps pur	air	eau	glycérine
Viscosité	$\eta = 1,8.10^{-5}\ Pl$	$\eta = 1,0.10^{-3}\ Pl$	$\eta = 1,4\ Pl$

Les expressions des forces de viscosité données sont les forces qui s'exercent sur une surface. Or pour étudier un écoulement fluide, on fait appel à la notion de particule fluide. Soit une particule fluide de volume $d\tau$ placée en M. Cette particule fluide subit les forces de viscosité exercées par le fluide environnant, cherchons l'expression de la résultante des forces de viscosité qu'elle subit. Pour cela on considère un particule fluide de volume élémentaire $d\tau = dxdydz$.

On se place dans le cas où $\vec{v} = v_x(y)\vec{e_x}$.



$d\vec F(y+dy)$ = force exercée par le haut sur le bas en $y+dy$

$$d\vec F(y+dy) = +\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy)\,dx\,dz\,\vec e_x$$

$d\vec F(y)$ = force exercée par le bas sur le haut en y

$$d\vec F(y) = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}(y)\,dx\,dz\,\vec e_x$$

la résultante des forces est :

$d\tau$: volume de la particule fluide

$$d\vec F = +\eta\underbrace{\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y)\right]}_{\simeq \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}dy}dx\,dz\,\vec e_x = +\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,\overbrace{dx\,dy\,dz}\,\vec e_x$$

Que devient l'expression de la force pour $v_x = v_x(x)$?

$$d\vec F = +\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\,d\tau\,\vec e_x$$

Que devient l'expression de la force pour $v_x = v_x(z)$?

$$d\vec F = +\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\,d\tau\,\vec e_x$$

Que devient l'expression de la force pour $v_x = v_x(x, y, z)$?

$$d\vec F = \eta\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right]d\tau\,\vec e_x = \eta\,\Delta v_x\,\vec e_x\,d\tau = \eta\,\Delta\vec v\,d\tau$$

On retient:

NB la force de viscosité qui s'exerce sur une particule fluide de volume $d\tau$ est : $\boxed{d\vec F_v = \eta\,\Delta\vec v\,d\tau}$ NB c'est tout le vecteur $\vec{v}$ que l'on dérive par rapport à x, y, et z

Important: au sujet du Laplacien en coordonnées cartésiennes: $\Delta\overrightarrow{v} = \dfrac{\partial^2\overrightarrow{v}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\overrightarrow{v}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\overrightarrow{v}}{\partial z^2}$

Cas où $\overrightarrow{v} = v(y)\overrightarrow{e_x}$

variable : y
direction : $\vec{e}_x$

$$\Delta\vec{v} = \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2} = \cancel{\frac{\partial^2(v(y)\vec{e}_x)}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2(v(y)\vec{e}_x)}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2(v(y)\vec{e}_x)}{\partial z^2}} = \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2}\vec{e}_x$$

Cas où $\overrightarrow{v} = v(x,z)\overrightarrow{e_y}$

variables : x et z
direction : $\vec{e}_y$

$$\Delta\vec{v} = \frac{\partial^2(v(x,z)\vec{e}_y)}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2(v(x,z)\vec{e}_y)}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2(v(x,z)\vec{e}_y)}{\partial z^2} = \left[\frac{\partial^2 v(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,z)}{\partial z^2}\right]\vec{e}_y$$

II. Equation de Navier-Stokes

Soit une particule fluide de masse $dm = \rho d\tau$, de viscosité dynamique η, de vitesse $\overrightarrow{v}$ soumise dans le référentiel d'étude galiléen aux forces:

- le poids : $d\vec{P} = dm\,\vec{g} = \rho\, d\tau\, \vec{g}$
- la résultante des forces de pression : $d\vec{F}_p = -\overrightarrow{grad}\, P \times d\tau$
- la résultante des forces de viscosité : $d\vec{F}_v = \eta\, \Delta\vec{v}\, d\tau$

- à d'autres forces $\overrightarrow{F} = d\tau\overrightarrow{f_v}$ où $\overrightarrow{f_v}$ désigne la densité volumique de force en $N.m^{-3}$.

La loi de la quantité de mouvement s'écrit: $\underbrace{\rho\, d\tau}_{\text{masse}} \times \underbrace{\vec{a}(M)_{R}}_{\text{accélération}} = \underbrace{\rho\, d\tau\, \vec{g} - \overrightarrow{grad}\, P\, d\tau + \eta\, \Delta\vec{v}\, d\tau + \vec{f}_v\, d\tau}_{\text{somme des forces}}$

après simplification par $d\tau$:

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\,\vec{v}\right] = \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}\, P + \eta\,\Delta\vec{v} + \vec{f}_v}$$

équation de Navier-Stokes (équation en $N.m^{-3}$)

Remarque 1 : dans un référentiel non galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie:

	$\mathcal{R}'$ en translation dans $\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$ en rotation dans $\mathcal{R}$
force d'inertie d'entrainement	$d\vec{F}_{ie} = -\rho\, d\tau\, \vec{a}(O')_{/R}$ $\vec{f}_{ie} = -\rho\,\vec{a}(O')_{/R}$	$d\vec{F}_{ie} = \rho\, d\tau\, \omega^2\, \overrightarrow{HM}$ $\vec{f}_{vie} = \rho\,\omega^2\,\overrightarrow{HM}$
force d'inertie de Coriolis	$d\vec{F}_{ic} = \vec{0}$	$d\vec{F}_{ic} = -2\rho\, d\tau\, \vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)_{/R'}$ $\vec{f}_{vic} = -2\rho\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)_{/R'}$

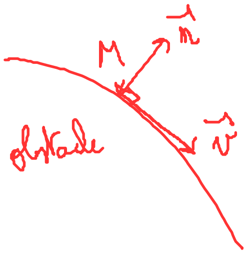
Remarque 2 : un problème de mécanique des fluides présente 5 inconnues scalaires qui sont:

$v_x,\ v_y,\ v_z,\ \rho$ et P

Pour résoudre, on dispose de l'équation de Navier-Stokes qui en projection donne 3 équations scalaires, de l'équation de conservation de la masse et d'une équation de thermodynamique.

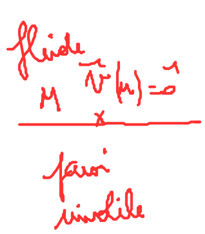
Pour déterminer les constantes d'intégration, on utilise les conditions aux limites:

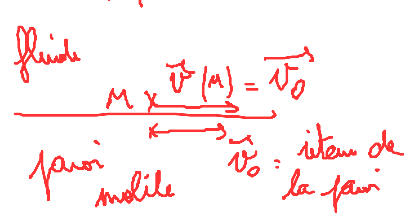
- Pour un fluide parfait (sans viscosité), sur un obstacle:



la vitesse en un point M de l'obstacle est tangentielle
$\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$

- Pour un fluide réel, sur un obstacle: un fluide réel est un fluide visqueux, il adhère aux parois des obstacles et donc $\vec{v}_{fluide/paroi} = \vec{0}$





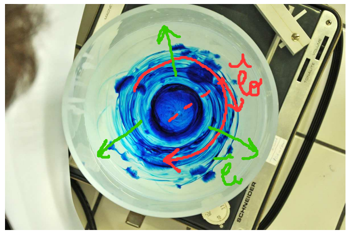
III. Le nombre de Reynolds

1. Convection et diffusion de la quantité de mouvement

Pour comprendre les notions de diffusion et de convection de la quantité de mouvement (soit de la vitesse), on étudie l'expérience qui consiste à placer un fluide visqueux dans un bêcher que l'on met en rotation autour de sons axe de symétrie.

De la convection ?

le fluide visqueux adhère aux parois et donc les couches de fluide près des parois se mettent en mouvement : ici les particules fluide décrivent des cercles



Convection (mvt circulaire du fluide selon $\vec{e_\theta}$)

diffusion radiale (selon $\vec{e_r}$)

De la diffusion ?

les couches de fluide près des parois se mettent en mvt car elles adhèrent aux parois puis elles entraînent les couches de fluide voisines grâce à leur viscosité, ainsi de proche en proche tout le fluide se met en mouvement.

Les deux phénomènes tendent à ce que la vitesse angulaire des particules fluide soit la même partout : système homogène.

Dans l'équation de Navier-Stokes, la convection et la diffusion sont présentes dans:

- Le terme convectif : $\rho(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$: c'est un terme non linéaire à l'origine des turbulences dans un écoulement, il est lié au mouvement des particules.

- Le terme diffusif : $\eta\Delta\vec{v}$: c'est un terme linéaire, il est lié à la viscosité du fluide.

2. Définition et expression du nombre de Reynolds

Définition : Le nombre de Reynolds est égal au rapport du terme convectif sur le terme diffusif, termes présents dans l'équation de Navier-Stokes.

On note : v : vitesse de l'écoulement

L : taille de l'obstacle

ρ : masse volumique du fluide

η : viscosité du fluide

Ordre de grandeur du terme convectif: $\|\rho(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}\| = \rho\frac{v^2}{L}$

Ordre de grandeur du terme diffusif: $\|\eta\Delta\vec{v}\| = \eta\frac{v}{L^2}$

Nombre de Reynolds

Définition du nbre de Reynolds

expression du nbre de Reynolds

$$\boxed{Re = \frac{\|\rho(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta\vec{v}\|}} = \frac{\rho\frac{v^2}{L}}{\eta\frac{v}{L^2}} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{vL}{\nu} \Rightarrow \boxed{Re = \frac{\rho v L}{\eta}}$$

Unité: Re sans unité

On peut définir aussi la viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

Conséquences:

Pour un écoulement à faible nombre de Reynolds: $Re \ll 1$ alors $\|\rho(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}\| \ll \|\eta \Delta \vec{v}\|$

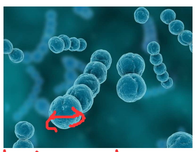
Dans ce type d'écoulement, les effets diffusifs linéaires l'emportent sur les effets convectifs

Pour un écoulement à fort nombre de Reynolds: $Re \gg 1$ alors $\|\rho(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}\| \gg \|\eta \Delta \vec{v}\|$

Dans ce type d'écoulement, les effets convectifs non linéaires l'emportent sur les effets diffusifs

Exemples de calcul de nombres de Reynolds:

Exemple 1 : une bactérie dans l'eau se déplace à une vitesse de 10 $\mu m.s^{-1}$. La viscosité de l'eau est de l'ordre de 10^{-3} Pl.



taille d'une bactérie $\simeq 1\ \mu m$

$$Re = \frac{\rho_{eau} v L}{\eta_{eau}} = \frac{10^3 \times 10.10^{-6} \times 10^{-6}}{10^{-3}} = 10^{-5} \ll 1$$

: dans l'écoulement de l'eau autour de la bactérie, les effets diffusifs linéaires l'emportent sur les effets convectifs

Exemple 2 : la viscosité de l'air est de l'ordre de 10^{-5} Pl.

taille de l'aile $L \sim 10\ m$

$$Re = \frac{\rho_{air} v L}{\eta_{air}} = \frac{1 \times 300 \times 10}{10^{-5}} = 3.10^9 \gg 1$$

: dans l'écoulement de l'air autour de l'aile d'avion, les effets convectifs non linéaires l'emportent sur les effets diffusifs

$v_{air} = 1000\ km.h^{-1} = \frac{1000}{3,6} \simeq 300\ m.s^{-1}$

A quoi sert le nombre de Reynolds?

Application 1 : il sert à prévoir la nature d'un écoulement : laminaire ou turbulent

Application 2 : il sert à prévoir l'expression de la force de traînée

Application 3 : il sert à estimer l'épaisseur de la couche limite.

IV. Application 1 : écoulement laminaire et turbulent

Un écoulement est dit laminaire lorsque les lignes de courant glissent les unes sur les autres en restant parallèles les unes aux autres : c'est un écoulement stable au cours du temps.

lignes de courant parallèles entre elles

l'écoulement est laminaire lorsque les effets diffusifs l'emportent soit pour un faible nbre de Reynolds : $Re \ll 1$

Un écoulement est dit turbulent lorsque les lignes de courant s'enchevêtrent les unes aux autres : c'est un écoulement instable et de structure chaotique dans le temps.

lignes de courant enchevêtrées

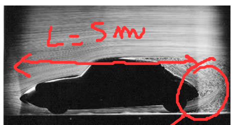
l'écoulement est turbulent lorsque les effets convectifs l'emportent soit pour de grands nombres de Reynolds. $Re \gg 1$

Des exemples du quotidien: on donne la viscosité de l'eau $\eta_e \approx 10^{-3}$ Pl, de l'air $\eta_a \approx 10^{-5}$ Pl et de la glace $\eta_g \approx 10^{13}$ Pl.

$$Re = \frac{\rho_{glace} v_{glacier} L}{\eta_{glace}} = \frac{10^3 \times 3.10^{-10} \times 10^2}{10^{13}} = 3.10^{-18} \ll 1$$

$$v_{glacier} = 1 \text{ cm/an} = \frac{10^{-2}}{360 \times 24 \times 3600} = 3.10^{-10} \text{ m s}^{-1}$$

l'écoulement du glacier dans la vallée est laminaire (les effets diffusifs l'emportent)

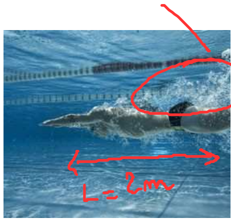


turbulences

$$Re = \frac{\rho_{air} v_{air/voiture} L}{\eta_{air}} = \frac{1 \times 28 \times 5}{10^{-5}} = 1{,}5.10^{7} \gg 1$$

$$v_{air/voiture} = v_{voiture/air} = 100 \text{ km h}^{-1} = 28 \text{ m s}^{-1}$$

l'écoulement de l'air autour de la voiture est turbulent (les effets convectifs l'emportent)



$$Re = \frac{\rho_{eau} v_{eau/nageur} L}{\eta_{eau}} = \frac{10^3 \times 1 \times 2}{10^{-3}} = 10^6 \gg 1$$

$$v_{eau/nageur} = v_{nageur/eau} = 1 \text{ m s}^{-1}$$

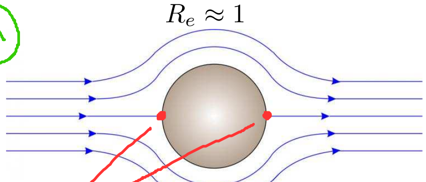
l'écoulement de l'eau autour du nageur est turbulent (les effets convectifs l'emportent)

Un exemple du programme: écoulement autour d'une sphère

écoulement laminaire

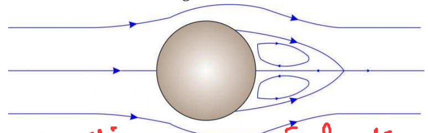
A

$R_e \approx 1$



points d'arrêt : la vitesse du fluide y est nulle

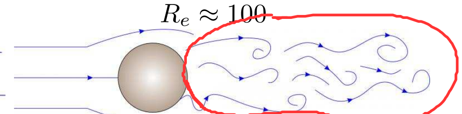
$R_e \approx 10$



transition entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent

écoulement turbulent

$R_e \approx 100$

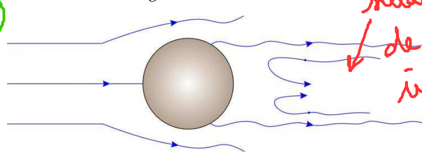


sillage turbulent qui dissipe beaucoup d'énergie

écoulement turbulent

B

$R_e \approx 10^4 - 10^5$

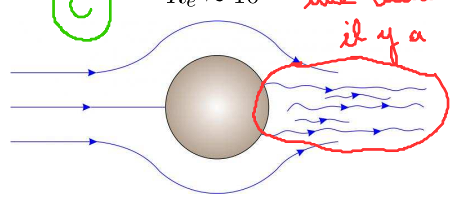


sillage turbulent de taille toujours importante

curieusement le sillage turbulent a une taille plus petite donc il y a moins d'énergie perdue

C

$R_e \approx 10^6$



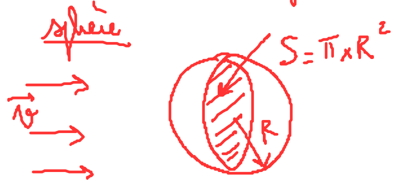
V. **Application 2 : Force de traînée**

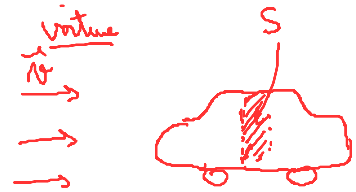
Soit un objet en mouvement dans un fluide dans le référentiel de la Terre. On peut aussi dire qu'il s'agit d'un fluide en écoulement relatif autour d'un objet immobile dans le référentiel lié à l'objet. La présence de l'objet modifie les lignes de courant qui doivent contourner l'objet, en réaction, le fluide exerce sur l'objet une force appelée force de traînée.

Définition : La force de traînée est la force qui s'oppose au mouvement relatif d'un corps dans un fluide. Elle a pour norme : $\boxed{F = \frac{1}{2}\rho S C_x v^2}$

où v est la vitesse de l'objet par rapport au fluide ($\vec{v}_{objet/fluide} = -\vec{v}_{fluide/objet}$)

où ρ est la masse volumique du fluide où S est la surface de l'objet perpendiculaire à l'écoulement



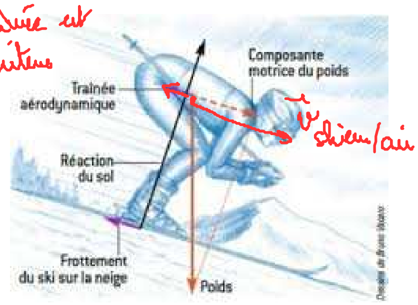


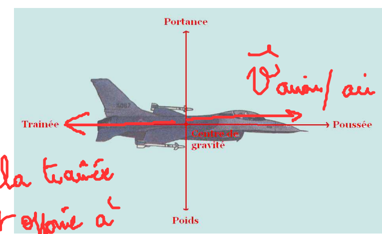
où C_x est le coefficient de traînée

Unité de C_x: $[C_x] = \left[\frac{F}{\rho S v^2}\right] = \frac{kg\, m\, s^{-2}}{kg\, m^{-3}\, m^2\, m^2\, s^{-2}} = 1$: C_x est sans unité

Des exemples du quotidien :

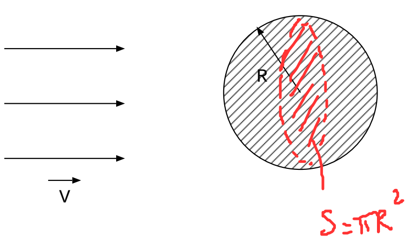
la traînée est opposée à la vitesse du skieur





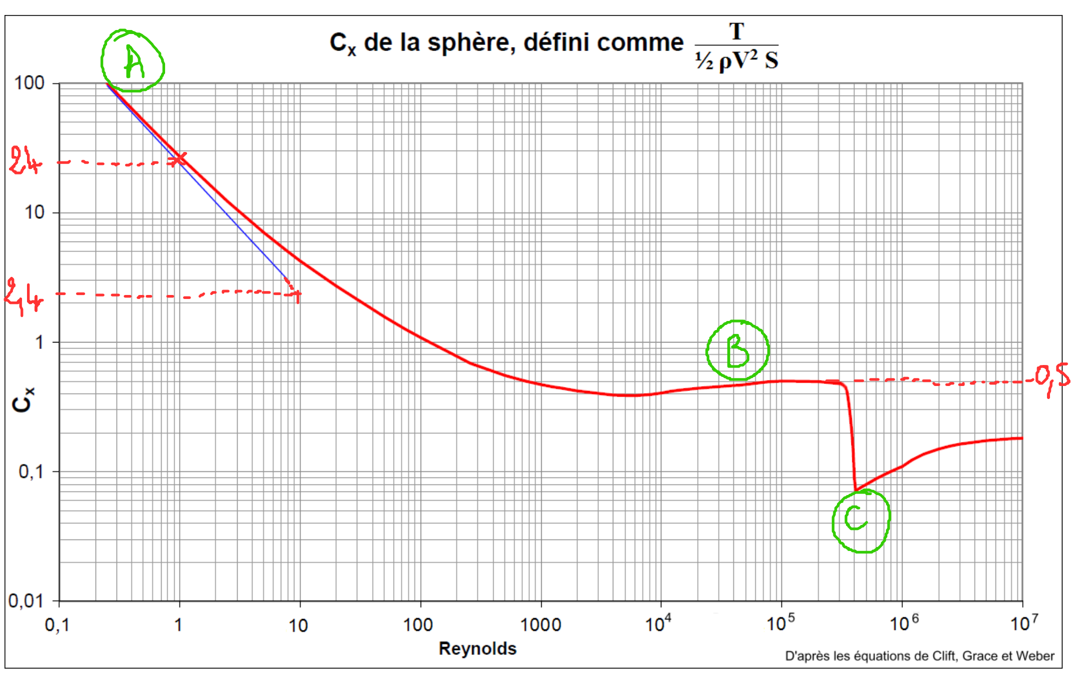
la traînée est opposée à la vitesse de l'avion

Cas particulier de la traînée sur une sphère: analyse du C_x



$$Re = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{\rho v 2R}{\eta}$$

$$F_{traînée} = \frac{1}{2} \rho S C_x v^2 = \rho \frac{\pi R^2}{2} C_x v^2$$



Commentaires sur la courbe donnant $\log C_x$ en fonction de $\log R_e$:

On distingue une première zone notée (A) pour $Re < 10$ où $\log C_x = a \log Re + b$
(la courbe $\log C_x$ en fonction de $\log Re$ est confondue avec une droite)

La droite passe par les points de coordonnées :
$(Re = 1 ; C_x = 24)$ et $(Re = 10 ; C_x = 2{,}4)$

pente de la droite : $a = \dfrac{\log 24 - \log 2{,}4}{\log 1 - \log 10} = \dfrac{\log\left(\frac{24}{2{,}4}\right)}{\log\left(\frac{1}{10}\right)} = -1$

calcul de b : $\log 24 = a \cancel{\log 1} + b$ soit $b = \log 24$

d'où $\log C_x = -\log Re + \log 24$

$\log C_x = \log \dfrac{24}{Re}$

soit $C_x = \dfrac{24}{Re} = \dfrac{24\,\eta}{\rho v 2R} = \dfrac{12\,\eta}{\rho v R}$

La force de traînée est donc : $F = \dfrac{\pi R^2}{2} \rho \dfrac{12\,\eta}{\rho v R} v^2 = 6\pi R \eta v$

soit $\boxed{\vec{F} = -6\pi R \eta \vec{v}}$ est la force de traînée proportionnelle à la vitesse pour les faibles nombres de Reynolds

Dans la zone (B), le coefficient de traînée est constant : $C_x \simeq \frac{1}{2}$ soit $F = \dfrac{\pi R^2}{2} \rho \dfrac{1}{2} v^2$

soit $\boxed{\vec{F} = -\dfrac{\pi R^2 \rho}{4} v^2 \dfrac{\vec{v}}{v}}$ est la force de traînée proportionnelle à la vitesse au carré pour de grands nombres de Reynolds

En (C), le coefficient de traînée baisse donc la force de traînée diminue, cela est dû à la taille du sillage turbulent qui diminue également.

Application : Extrait de l' art du ballon bien brossé pour la science 391 mai 2010 C'est la finale de l'Euro 2004: le tireur de coup franc s'élance, frappe le ballon et le propulse à plus de 100 km/h. La balle passe au-dessus du mur défensif et file à droite vers un point situé au-dessus du cadre de la cage. A l'approche du but, elle ralentit soudainement, se déporte latéralement et plonge dans la lucarne gauche! Les forces responsables de ces effets (déviation et fort ralentissement du ballon en fin de trajectoire) s'expliquent en analysant le sillage du ballon dans l'air).

Au moment de la frappe : $Re > \dfrac{\rho_{air} v\, 2R}{\eta_{air}} = \dfrac{1 \times \frac{100}{3{,}6} \times 0{,}2}{10^{-5}} = \dfrac{28 \times 2}{10^{-4}} \simeq 5.10^5$

Soit $Re > 5.10^5$ au-dessus de la zone (C).

Lors du vol, la vitesse du ballon diminue sous l'action de la force de traînée entraînant la baisse du nombre de Reynolds. Ainsi quand Re diminue, il atteint la valeur critique de la zone (C), C_x diminue brutalement, et donc la force de traînée diminue et le ballon accélère brutalement

Conclusion:

Pour des faibles nombres de Reynolds (soit pour un fluide très visqueux et/ou un écoulement très lent et/ou un système de petite taille) : l'écoulement est laminaire et la force de traînée est proportionnelle à la vitesse relative de l'écoulement autour de l'obstacle.

Pour des forts nombres de Reynolds (soit pour un fluide peu visqueux et/ou un écoulement très rapide et/ou un système de grande taille) : l'écoulement est turbulent et la force de traînée est proportionnelle au carré de la vitesse relative de l'écoulement autour de l'obstacle.

VI. **Application 3 : Couche limite**

Modéle de l'écoulement parfait : un fluide suit le modèle de l'écoulement parfait si l'on peut négliger tous les phénomènes diffusifs:

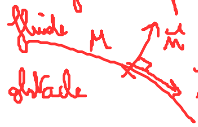
- Diffusion de vitesse par les forces de viscosité
- Diffusion thermique

L'équation d'Euler s'écrit: $\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v}\right] = \rho\vec{g} - \vec{\text{grad}}\, P + \vec{f_v}$

c'est l'équation de Navier Stokes avec $\eta = 0$ (pas de force de viscosité)

B

Les conditions aux limites sur un obstacle sont: la vitesse du fluide n'est pas nulle sur la paroi entre l'obstacle et le fluide car le fluide parfait n'adhère pas à la paroi. Cette vitesse est tangente à la paroi :

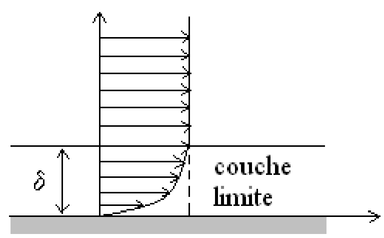


$\vec{v}(M)\cdot\vec{n}(M) = 0$

$\vec{v}(M) \perp \vec{n}(M)$

Ce modèle convient bien à la description d'un fluide dans les zones d'écoulement où la vitesse varie peu d'un point à un autre, c'est-à-dire "loin" des obstacles.

En effet, un fluide réel adhère aux parois et la vitesse relative du fluide par rapport aux parois est nulle. Il existe donc, au voisinage des obstacles, une zone d'épaisseur δ appelée couche limite dans laquelle on ne peut pas négliger les phénomènes diffusifs: le modèle du fluide parfait ne peut pas s'appliquer. En dehors de cette zone, le modèle du fluide parfait convient.



On cherche un ordre de grandeur de δ:

Dans la couche limite les phénomènes ...diffusifs..... l'emportent : $\|\eta\Delta\vec{v}\| = \eta\frac{v}{\delta^2}$: ordre de grandeur des effets diffusifs

En dehors de la couche limite, les phénomènes ...convectifs...... l'emportent : $\|\rho(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v}\| = \rho\frac{v^2}{L}$: ordre de grandeur des effets convectifs

Au bord de la couche limite: $\|\eta\Delta\vec{v}\| \simeq \|\rho(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v}\|$

soit $\eta\frac{v}{\delta^2} = \rho\frac{v^2}{L}$ d'où $\delta = \sqrt{\frac{\eta L}{\rho v}}$

Exp : Couche limite autour d'une aile d'avion : $\delta = \sqrt{\frac{10^{-5}\times 10}{1\times\frac{1000}{3,6}}} = \sqrt{3,6\times 10^{-7}} \simeq$ mm

l'écoulement de l'air autour de l'avion est donc parfait (δ très petite donc couche limite négligeable)

Exp : miel sur une petite cuillère

$\eta_{miel} = 10^3$ Pa.s

$v \sim 10^{-3}$ ms^{-1}

$\delta = \sqrt{\frac{10^3\times 10^{-2}}{10^3\times 10^{-3}}} \sim 3$ m

l'écoulement du miel est visqueux