

Chapitre MF 4 : dynamique des fluides parfaits

Ce chapitre concerne l'étude des fluides qui suivent le modèle du fluide parfait (modèle dans lequel on néglige les effets dissipatifs tels que la viscosité), c'est le cas de tous les fluides en dehors de la couche limite.

Dans ce cas le fluide vérifie l'équation d'Euler: $\heartsuit$

$$\rho \left[\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{accélération des}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}}_{\substack{\text{force} \\ \text{inertie} \\ \text{volémique}}} \right] = \underbrace{\rho \vec{g}}_{\substack{\text{force} \\ \text{de} \\ \text{pesion} \\ \text{volémique}}} - \underbrace{\text{grad } p}_{\substack{\text{force} \\ \text{de} \\ \text{pression} \\ \text{volémique}}} + \underbrace{\vec{f}_a}_{\substack{\text{autres} \\ \text{forces} \\ \text{volémiques}}} \quad \text{eq. en N.m}^{-3}$$

I. Relation de Bernoulli (la plus fréquente)

1. Démonstration de la relation de Bernoulli

Hypothèses d'étude:

- fluide parfait
- écoulement stationnaire et incompressible
- pas de pièces mobiles (soit pas d'autres forces que les poids et les forces de pression)

Commentaires :

- le fluide est parfait en dehors de la couche limite
- un liquide est toujours en écoulement incompressible
- un gaz est en écoulement incompressible lorsque $v < v_{son} = 340 \text{ m.s}^{-1}$

Formulaire : $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \text{grad}(\frac{v^2}{2}) + \text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}$ et $\text{grad } U \cdot d\vec{OM} = dU$

L'équation d'Euler s'écrit:

$$\rho \left[\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\substack{\text{écoulement} \\ \text{stationnaire}}} + \text{grad}(\frac{v^2}{2}) + \underbrace{\text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}}_{\substack{\text{force} \\ \text{de} \\ \text{Coriolis}}} \right] = \rho \vec{g} - \text{grad } p$$

Autre expression de $\rho \vec{g}$ pour Oz vertical ascendant:

$$\rho \vec{g} = -\rho g \vec{e}_z = -\text{grad}(p_g)$$

composée avec une trajectoire en régime stationnaire

On projette l'équation d'Euler sur une ligne de courant cela revient à faire multiplier scalairement l'équation d'Euler par le vecteur $d\vec{OM}$ (vecteur tangent à la ligne de courant en M).

$$\rho \underbrace{\text{grad}(\frac{v^2}{2}) \cdot d\vec{OM}}_{\substack{\text{en une ligne} \\ \text{de courant } p = \text{cte}}} + \underbrace{(\text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{OM}}_{\substack{\text{vecteur } \perp \text{ à } \vec{v} \text{ donc} \\ \perp \text{ à } d\vec{OM}}} = -\text{grad}(p_g) \cdot d\vec{OM} - \text{grad } p \cdot d\vec{OM}$$

$$\vec{\text{grad}} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + p \right) \cdot d\vec{OM} = 0 \text{ ou } d \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + p \right) = 0$$

ou encore la quantité $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + p$ est une constante ou une ligne de courant

□

Rq: pour (Oy) vers le bas: on a $\frac{\rho v^2}{2} - \rho g z + p = \text{cte}$

2. Commentaires sur l'équation de Bernoulli

Sens physique de la relation de Bernoulli:

$\frac{\rho v^2}{2} = e_c$: c'est l'énergie cinétique volumique

$\rho g z = e_{ps}$: " " potentielle de pesanteur volumique

$p = e_p$: " " potentielle des forces de pression volumique

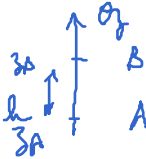
$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + p$ est donc l'énergie mécanique volumique

La relation de Bernoulli dit que l'énergie mécanique d'une particule fluide sur sa trajectoire est constante.

Attention, l' E_m n'est pas la même dans tout le fluide, les particules fluides peuvent avoir des $E_m \neq$

Cas particulier de l'hydrostatique: $v=0$

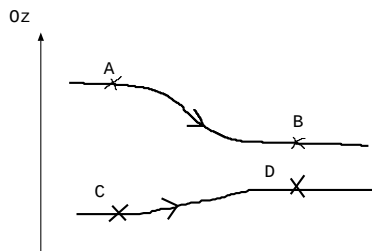
$\rho g z + p = \text{cte}$



$\rho g z_A + p_A = \rho g z_B + p_B$

$p_A = p_B + \rho g (z_B - z_A) = p_B + \rho g h$

Comment applique-t-on la relation dans les exercices?



hyp: fluide parfait
écoulement incompressible et stationnaire
pas de frottements

On applique Bernoulli sur la ligne de courant entre A et B:

$\frac{\rho v_A^2}{2} + p_A + \rho g z_A = \frac{\rho v_B^2}{2} + p_B + \rho g z_B$

On applique Bernoulli sur la ligne de courant entre C et D:

$\frac{\rho v_C^2}{2} + p_C + \rho g z_C = \frac{\rho v_D^2}{2} + p_D + \rho g z_D$

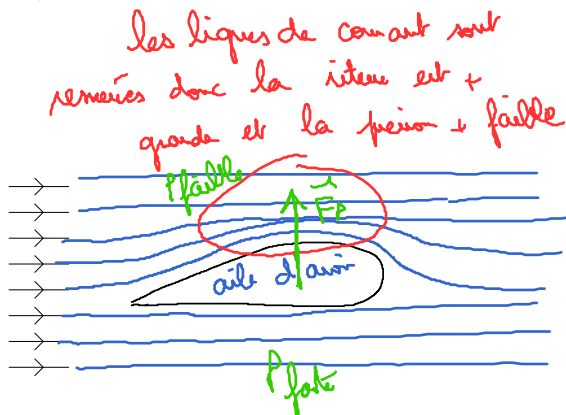
Cas particulier d'un gaz : $\rho_{\text{gaz}} \sim 1 \text{ kg.m}^{-3}$ $\rho_{\text{liq}} \sim 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
 pour $h = 1 \text{ m}$: $\rho_{\text{gaz}} g h \sim 10 \text{ J.m}^{-3}$ $\rho_{\text{liq}} g h \sim 10^4 \text{ J.m}^{-3}$ $\rho \sim 10^5 \text{ kg}$

En un gaz, dans la relation de Bernoulli on peut négliger le terme $\rho g z$ (Ep de pesanteur)
 on écrit alors : $\rho \frac{v^2}{2} + P = \text{cste}$ sur une ligne de courant

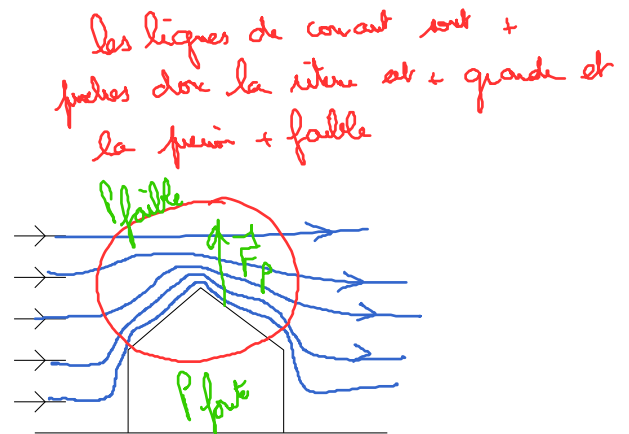
3. Analyse qualitative des lignes de courant

Dans un écoulement incompressible lorsque les lignes de courant se resserrent la vitesse augmente
 (le débit volumique est conservé : $D_v = v \times S = \text{cste}$)

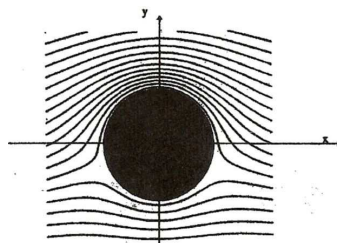
En absence de frottements, pour le fluide parfait en écoulement stationnaire, lorsque la vitesse $\uparrow$, la pression $\downarrow$



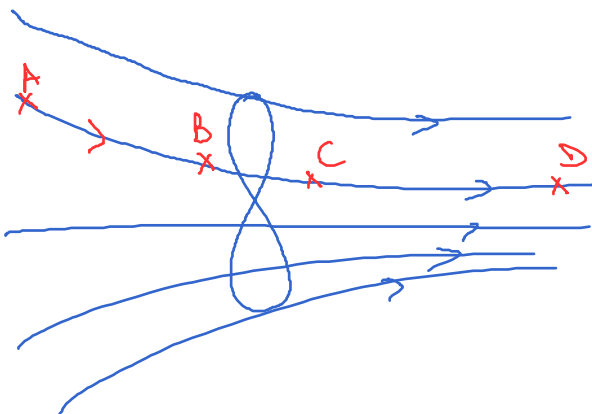
$\vec{F}_p$: force de portance qui permet à l'avion de voler



$\vec{F}_p$: force de pression qui soulève le toit



4. En présence de pièces mobiles



En un fluide parfait, en écoulement stationnaire et incompressible, on peut appliquer Bernoulli

entre A et B : $\rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A + P_A = \rho \frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B + P_B$

entre C et D : $\rho \frac{v_C^2}{2} + \rho g z_C + P_C = \rho \frac{v_D^2}{2} + \rho g z_D + P_D$

mais il n'y a pas de relation entre les E_m en B et en C

II. Autre relation de Bernoulli

Hypothèses d'étude:

- fluide parfait
- Écoulement incompressible et stationnaire
- Pas de pièces mobiles
- Écoulement irrotationnel.

L'équation d'Euler s'écrit:

$$\rho \left[\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{stationnaire}} + \underbrace{\vec{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right)}_{\text{irrotationnel}} + \underbrace{\cancel{\vec{v} \wedge \vec{\omega}}}_{\text{irrotationnel}} \right] = -\rho \vec{g} - \vec{\text{grad}} \mathcal{L}$$

d'où $\vec{\text{grad}} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + p \right) = \vec{0}$ par (0,0) vers le haut

soit $\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + p = \text{cte}$ dans tout le fluide

Cette relation traduit que l'Em est constante dans tout le fluide, les particules fluides ont toutes la même Em et leur Em est cte au cours de leur mouvement.

Remarque: on conserve les hypothèses d'un écoulement incompressible et irrotationnel, d'un fluide parfait, en absence de pièces mobiles mais l'écoulement n'est pas stationnaire, le théorème de Bernoulli devient:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \cancel{\vec{v} \wedge \vec{\omega}} \right] = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}} \mathcal{L}$$

d'où $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + p \right) = \vec{0}$ avec $\vec{v} = \vec{\text{grad}} \phi$ pour un écoulement irrotationnel

soit $\vec{\text{grad}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + p \right) = \vec{0}$

la quantité $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + p$ est cte dans tout le fluide