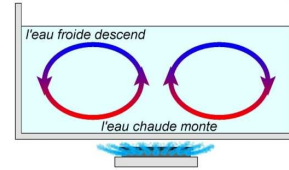


Chapitre th 2 : diffusion thermique

La conduction thermique ou diffusion thermique, est un mode de transfert thermique provoqué par une différence de températures entre deux régions d'un même milieu ou entre deux milieux en contact. La diffusion cesse lorsque la température est uniforme. La diffusion thermique se réalise sans déplacement de matière à l'échelle macroscopique par opposition à la convection qui est un autre mode de transfert thermique. La diffusion peut s'interpréter comme la transmission de proche en proche de l'agitation thermique : un atome (ou une molécule) cède une partie de son énergie cinétique à l'atome voisin.

Définition Wikipédia



Dans un solide, les transferts thermiques ne se font que par diffusion des fortes vers les faibles températures. Ici la chaleur diffuse du fond de la casserole vers le manche et l'enfant peut se brûler.

Les masses d'eau au contact de la source de chaleur se réchauffent et deviennent moins denses donc elles s'élèvent, puis au contact de l'atmosphère elles refroidissent, deviennent plus denses et donc tombent ... La convection est le principal mode de transfert thermique dans un fluide.

I. Les grandeurs physiques

1. Définitions

$T(x, t)$: température $[T] = K$ $T = 273 + t$ (t en °Celsius)

$\vec{j}_Q(x, t)$: vecteur densité de courant thermique

Sa norme représente l'énergie thermique qui traverse une surface unité par unité de temps

Son sens et sa direction sont le sens et la direction du transfert thermique

$$[j_Q] = J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1} = W \cdot m^{-2} \quad (\text{puissance surfacique})$$

$$\boxed{\Phi = \dot{Q} = \iint \vec{j}_Q(\vec{m}) \cdot d\vec{S} \vec{m}(\vec{m})} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta Q = \Phi dt = \dot{Q} dt = \iint \vec{j}_Q(\vec{m}) \cdot d\vec{S} \vec{m}(\vec{m}) dt}$$

Soit $j_Q(x, t)S$ représente la puissance thermique qui traverse S

Soit $j_Q(x, t)Sdt$ représente l'énergie thermique qui traverse S pendant dt

Autres grandeurs :

ρ : masse volumique $[\rho] = kg \cdot m^{-3}$

c : capacité thermique massique $[c] = J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$

U : énergie interne $[U] = J$

on a :

$$\begin{aligned} dU &= U(t+dt) - U(t) \\ &= \int V c (T(t+dt) - T(t)) \\ \Delta U &= U_F - U_I \\ &= \rho V c (T_F - T_I) \end{aligned}$$

2. Utilisation de ces grandeurs

Soit une sphère de rayon $R = 5 \text{ cm}$ et de hauteur $H = 1 \text{ m}$ remplie d'eau.

Question 1 : L'eau est à la température initiale $T_i = 20^\circ\text{C}$ et à la température finale $T_f = 100^\circ\text{C}$. Donnée : $c = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Calculer la variation d'énergie interne de l'eau dans le cylindre entre les états initial et final.

$$\Delta U = m \times c \times \Delta T = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 c (T_f - T_i) = 10^3 \times \frac{4}{3} \pi (5 \cdot 10^{-2})^3 \times 4,18 \cdot 10^3 (100 - 20) \text{ Joule}$$

Question 2 : Le vecteur densité de courant thermique s'écrit $\vec{j}_Q = j_0 \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques avec $j_0 = 100 \text{ W.m}^{-2}$. Calculer l'énergie thermique perdue par l'eau dans la sphère pendant une heure.

Diagramme d'une sphère de rayon R avec un vecteur $\vec{j}_Q$ sortant de la surface. Formules :

$$\Phi = \oint \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \quad \text{ici } \vec{m} = \vec{e}_r \text{ (flux sortant, on dirige vers l'extérieur car on calcule l'énergie perdue)}$$

$$= \oint j_0 \vec{e}_r \cdot d\vec{S} \vec{e}_r$$

puissance perdue : $\Phi = j_0 \oint dS = j_0 4\pi R^2$

énergie perdue : $Q = \Phi \Delta t = j_0 4\pi R^2 \Delta t$
 $= 100 \times 4\pi (5 \cdot 10^{-2})^2 \times 3600 \text{ J}$

II. Loi de Fourier

loi de Fourier

C'est une loi phénoménologique qui s'écrit : $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}} T$ où λ s'appelle la conductivité thermique du matériau.

A une dimension, lorsque la diffusion se produit selon l'axe Ox :

Unité de λ : $[\lambda] = \frac{[\vec{j}_Q]}{[\vec{\text{grad}} T]} = \frac{\text{J.m}^{-2}.\text{s}^{-1}}{\text{K.m}^{-1}} = \text{J.s}^{-1}.\text{K}^{-1}.\text{m}^{-1} = \text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$

$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$ soit $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$
 et $j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$ en régime stationnaire

Ordres de grandeur de λ à connaître :

milieu	air	eau	acier
$\lambda (\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1})$	0,02	0,6	50

+ λ est petit et le matériau est isolant du point de vue thermique

Que traduit cette loi?

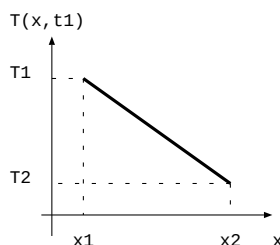
$\vec{\text{grad}} T$ est dirigé des faibles vers les fortes températures donc la diffusion se fait des fortes vers les faibles températures (selon $-\vec{\text{grad}} T$).
 La diffusion cesse lorsque la température est homogène -
 La diffusion est d'autant + efficace que λ est grand et qu'il y a de fortes inhomogénéités

Illustration graphique :

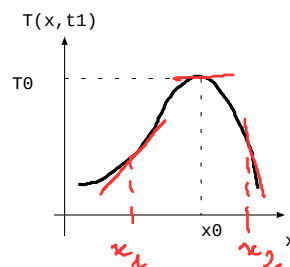
$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2}$$

$$j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

donc $j_Q = -\lambda \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2} > 0$ ici



$\vec{j}_Q$ est dirigé des fortes vers les faibles températures



$\vec{j}_Q(x_1)$ et $\vec{j}_Q(x_2)$ sont dirigés vers l'extérieur de la zone de forte température.

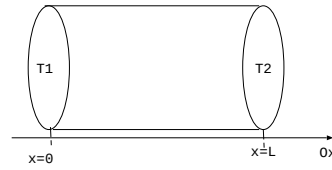
$\vec{j}_Q(x_0) = \vec{0}$
 $\|\vec{j}_Q(x_1)\| < \|\vec{j}_Q(x_2)\|$
 ($j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$ donc $\|\vec{j}_Q\|$ est proportionnelle à la pente de la tangente)

III. Cas du régime stationnaire

1. Equation de diffusion : c'est l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$, elle se trouve en utilisant la loi de Fourier et en écrivant la conservation de l'énergie dans le système.

Situation :

Soit un cylindre d'axe Ox de section S compris entre $x = 0$ et $x = L$. On note $T(x)$ la température dans ce cylindre avec $T(x = 0) = T_1$ et $T(x = L) = T_2$, ces températures sont maintenues constantes au cours du temps aux extrémités du cylindre.



Commentaires préliminaires sur ce dispositif:

Si $T_1 > T_2$: le transfert thermique se fait des fortes vers les faibles températures donc ici selon $(+Ox)$. Dans ce cas, le système perd de la chaleur en $x=0$ et gagne de l'énergie en $x=L$, pour maintenir les températures T_1 et T_2 constantes il faut donc un système qui apporte de l'énergie thermique en $x=0$ et qui en prend au cylindre en $x=L$.

Recherche de $T(x)$:

on considère un système élémentaire compris entre x et $x+dx$.

dx est suffisamment petit pour que $T(x)$ soit supposée homogène dans le cylindre.

En régime stationnaire la température est constante donc l'énergie reçue par le système est égale à l'énergie perdue entre t et $t+dt$.

$$\text{soit } j_Q(x) S dt = j_Q(x+dx) S dt$$

donc $j_Q(x)$ ne dépend pas de x soit

$$\boxed{\frac{dj_Q}{dx} = 0}$$

équation de conservation de l'énergie

Loi de Fourier: $j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$ soit

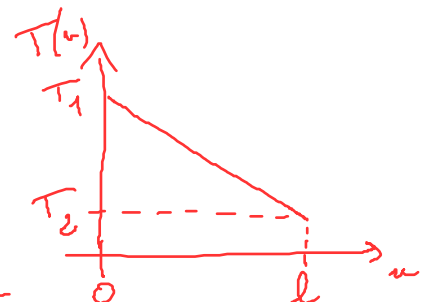
$$\boxed{\frac{dT}{dx} = 0}$$

équation de diffusion

$$\frac{dT}{dx} = A \quad T(x) = Ax + B$$

Conditions aux limites $\left(\begin{array}{l} T(x=0) = B = T_1 \\ T(x=L) = AL + B = T_2 \end{array} \right.$

$$\text{soit } T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \quad \text{et} \quad j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L}$$



j_Q des fortes vers les faibles températures

Conclusion : on a trouvé à 1D qu'en régime permanent $\frac{dj_{Qx}}{dx} = 0$. Ce qui se généralise à 3D par:

$$\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{Qy}}{\partial y} + \frac{\partial j_{Qz}}{\partial z} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\text{div } \vec{j}_Q = 0} \quad \text{équation de conservation de l'énergie}$$

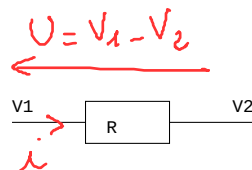
On combine cette équation à la loi de Fourier et on en déduit l'équation de diffusion à 3D en régime permanent:

conservation de l'énergie : $\text{div } \vec{j}_Q = 0$
 loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}} T$ } donc $\text{div}(-\lambda \vec{\text{grad}} T) = -\lambda \text{div}(\vec{\text{grad}} T) = 0$
 soit $\boxed{\Delta T = 0}$ équation de diffusion en régime stationnaire

Cette équation est valable en régime stationnaire, en coordonnées sphériques et cylindriques à condition d'utiliser l'expression du Laplacien adapté.

2. Notion de résistance thermique

Conduction électrique

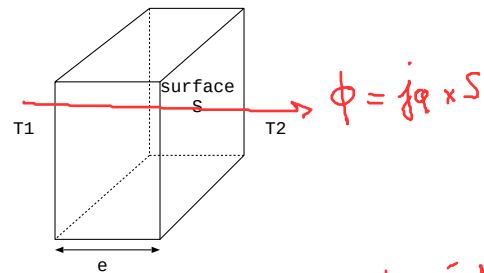


$U = V_1 - V_2$: différence de potentiel qui met en mouvement les charges

$i = \frac{dq}{dt}$: flux de charges

$$\boxed{U = R i} \quad [R] = \Omega = V \cdot A^{-1}$$

Conduction ou diffusion thermique



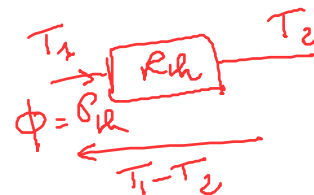
$T_1 - T_2$: différence de température qui crée la diffusion thermique

$\phi_{th} = \phi = j_Q \times S$: puissance ou flux thermique à travers S

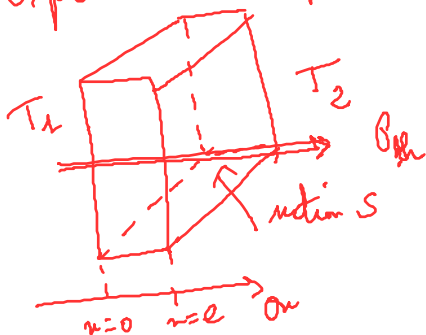
On définit par analogie une résistance thermique :

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{th}}} \quad [R_{th}] = K \cdot W^{-1}$$

schéma électrique équivalent



Expression de R_{th} pour le système suivant à 1D :



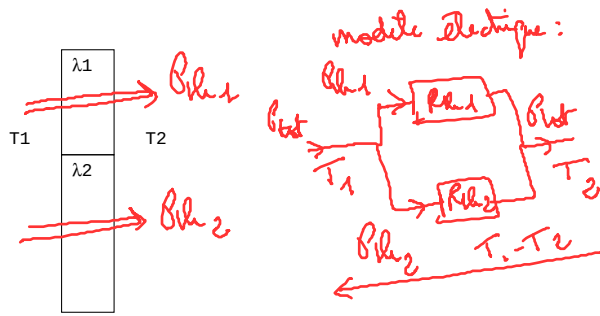
$$\phi_{th} = j_Q \times S \quad \text{avec} \quad j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} = \text{constante}$$

$$\text{soit} \quad j_Q = -\lambda \frac{T(x=0) - T(x=e)}{0 - e} = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{e}$$

$$\text{d'où} \quad \phi_{th} = \frac{\lambda (T_1 - T_2) S}{e} \quad \text{et} \quad \boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{th}} = \frac{e}{\lambda S}} \quad B$$

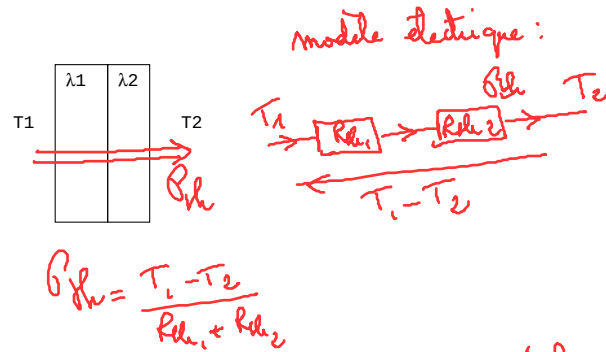
la résistance thermique s'oppose au passage d'un transfert thermique, elle est d'autant + grande que la matériau est isolant (λ petit) et que l'épaisseur à traverser est grande (e grand)

3. Association de résistance en série ou en parallèle



$$\phi_{h_{tot}} = \phi_{h_1} + \phi_{h_2} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th2}}$$

$$\text{soit } \phi_{h_{tot}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th_{eq}}} \text{ avec } \frac{1}{R_{th_{eq}}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}$$



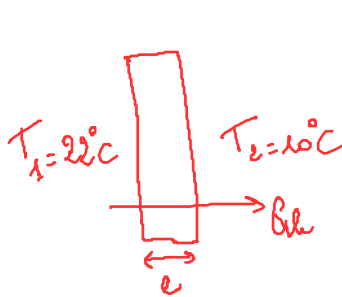
$$\phi_{h_{tot}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th1} + R_{th2}}$$

Quand 2 parois sont soumises à la même différence de températures, leurs résistances thermiques sont en parallèles.

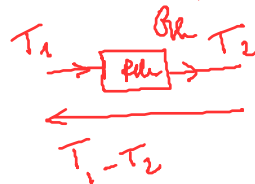
Quand 2 parois sont parcourues par le même flux thermique, leurs résistances thermiques sont en série.

4. Utilisation de la résistance thermique

Exemple 1: Soit un vitrage simple d'épaisseur $e = 5 \text{ mm}$, de conductivité thermique $\lambda = 1,15 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. La température de surface du vitrage intérieure est 22°C , la température de surface du vitrage extérieure 10°C . Calculer la résistance thermique du vitrage et le flux thermique dissipé à travers ce vitrage pour une surface de 10 m^2 .



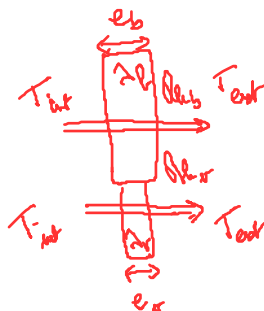
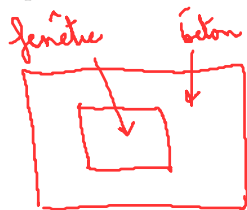
modèle électrique équivalent :



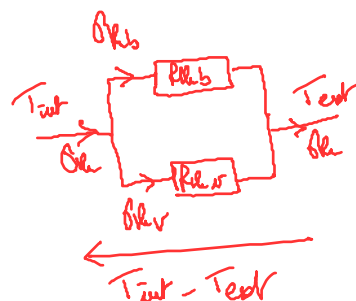
$$\phi_h = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} \text{ avec } R_{th} = \frac{e}{\lambda S} = 4,35 \cdot 10^{-4} \text{ K.W}^{-1}$$

$$\phi_h = \frac{12}{4,35 \cdot 10^{-4}} = 27,6 \text{ kW}$$

Exemple 2: Soit un mur de façade de surface totale 45 m^2 composé de $S_b = 40 \text{ m}^2$ de béton sur une épaisseur $e_b = 25 \text{ cm}$ et d'une fenêtre simple vitrage en verre d'épaisseur $e_v = 5 \text{ mm}$ et de surface $S_v = 5 \text{ m}^2$. La température extérieure est de -3°C et la température intérieure de 20°C . On donne les conductivités thermiques du béton $\lambda_b = 0,9 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et du verre $\lambda_v = 1,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Représenter le schéma électrique équivalent et calculer la puissance des pertes thermiques par ce mur de façade. *Réponse : $P = 28 \text{ kW}$*



modèle électrique :



$$\phi_h = \frac{T_1 - T_2}{R_{thb}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{thv}}$$

$$\text{avec } R_{thb} = \frac{e_b}{\lambda_b S_b} = 6,94 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

$$R_{thv} = \frac{e_v}{\lambda_v S_v} = 8,33 \cdot 10^{-4} \text{ K.W}^{-1}$$

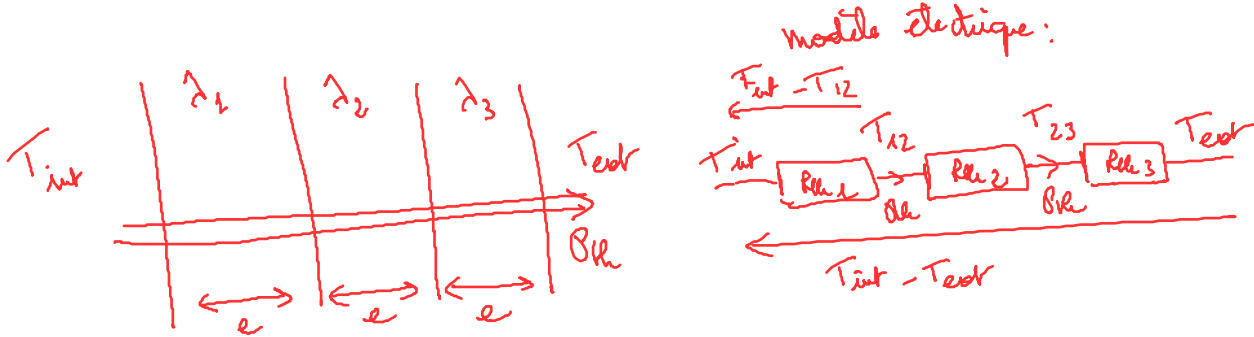
$$\phi_h = 3,31 + 27,6 = 31 \text{ kW}$$

Exemple 3: Le mur d'un four industriel comporte trois couches de matériaux différents accolées les unes aux autres :

- Une couche de briques réfractaires à l'intérieur du four ($\lambda_1 = 1,21 \text{ SI}$)
- Une couche de revêtement calorifuge ($\lambda_2 = 0,08 \text{ SI}$)
- Une couche de briques à l'extérieur du four ($\lambda_3 = 0,69 \text{ SI}$)

Chaque couche a une épaisseur $e = 10 \text{ cm}$. La température est de $T_i = 850^\circ \text{C}$ à l'intérieur du four et de $T_e = 32^\circ \text{C}$ à l'extérieur.

Utiliser une analogie électrique pour modéliser le système. La surface du mur est de 10 m^2 , calculer l'énergie perdue par diffusion pendant 24 heures? Quelle est la température T_{12} à l'interface brique réfractaire-revêtement calorifugé et la température T_{23} à l'interface brique-revêtement calorifugé au milieu du revêtement? Réponses : $R_{\text{tot}} = 0,148 \text{ SI}$, $P = 5,5 \text{ kW}$, $T_{12} = 804^\circ \text{C}$, $T_{23} = 115^\circ \text{C}$



$$R_{\text{th}1} = \frac{e}{\lambda_1 S} = 8,26 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

$$R_{\text{th}2} = \frac{e}{\lambda_2 S} = 0,125 \text{ K.W}^{-1}$$

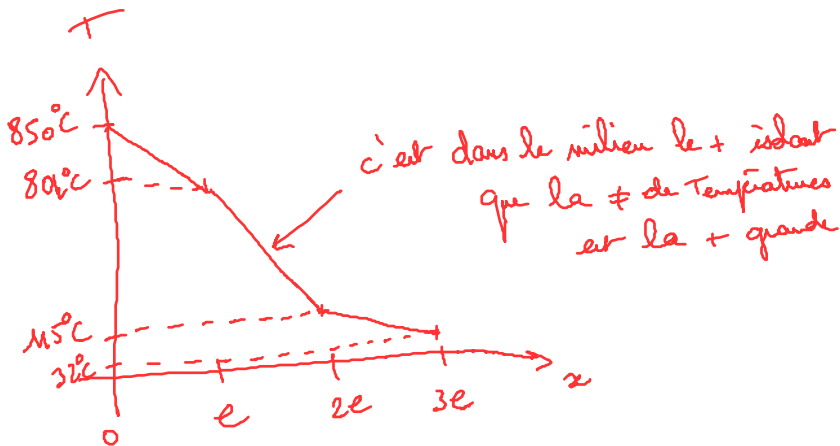
$$R_{\text{th}3} = \frac{e}{\lambda_3 S} = 1,45 \cdot 10^{-2} \text{ K.W}^{-1}$$

$$R_{\text{th}} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{P} = 5,54 \text{ kW}$$

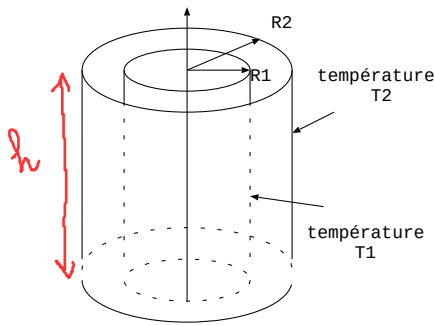
On peut appliquer $T_{\text{int}} - T_{12} = R_{\text{th}1} \times P \Rightarrow T_{12} = T_{\text{int}} - R_{\text{th}1} P = 804^\circ \text{C}$

ou le diviseur de tension : $T_{\text{int}} - T_{12} = \frac{R_{\text{th}1}}{R_{\text{th}1} + R_{\text{th}2} + R_{\text{th}3}} \times (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})$

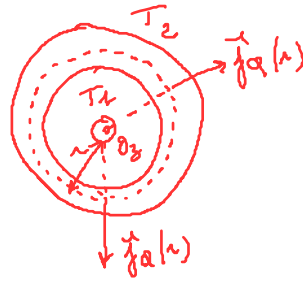
On peut appliquer $T_{23} - T_{\text{ext}} = R_{\text{th}3} P \Rightarrow T_{23} = T_{\text{ext}} + R_{\text{th}3} P = 115^\circ \text{C}$



5. Expression de la résistance thermique en symétrie cylindrique



Vue de dessus :



La diffusion thermique est radiale

$$\text{soit } \vec{j}_q(r) = j_q(r) \vec{e}_r$$

avec $j_q > 0$ pour $T_1 > T_2$

$j_q < 0$ pour $T_1 < T_2$

On note $P_{th}(r)$ la puissance thermique qui traverse le cylindre de rayon r et de hauteur h :

$$P_{th}(r) = j_q(r) \times 2\pi r h$$

Soit le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$ (avec $R_1 < r < r+dr < R_2$). En régime stationnaire la température du système est constante donc l'énergie thermique reçue est égale à l'énergie thermique perdue entre t et $t+dt$

$$\text{soit : } \delta Q_{\text{reçu}} = \delta Q_{\text{perdue}}$$

$$P_{th}(r) = P_{th}(r+dr)$$

$$\text{donc } P_{th} = j_q(r) 2\pi r h = \text{Constante} \quad (\text{indépendante de } r)$$

⚠ ce n'est pas $j_q(r)$ qui est constant c'est $P_{th}(r)$

On écrit la loi de Fourier : $\vec{j}_q = -\lambda \vec{\text{grad}} T$ soit $j_q(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}$

On cherche la résistance thermique de ce dispositif, elle s'écrit : $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{P_{th}}$

On part de : $P_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r h$ et on sépare les variables T et r soit :

$$-P_{th} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = 2\pi \lambda h \int_{T_1}^{T_2} dT$$

les bornes d'intégration se

correspondent : $T(r=R_1) = T_1$

$T(r=R_2) = T_2$

$$\text{soit } -P_{th} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 2\pi \lambda h (T_2 - T_1)$$

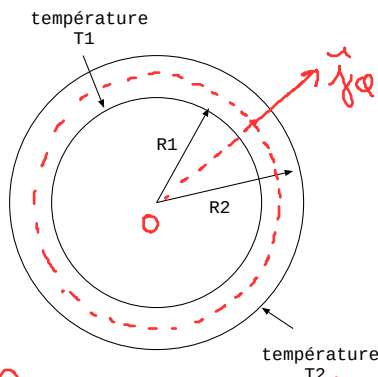
$$\text{soit } R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{P_{th}} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi \lambda h}$$

la résistance mesure l'opposition du système au passage du transfert thermique, + le matériau est isolant, + λ est petit et + la résistance est grande

Rq : dans les exercices où il y a création ou absorption de particules, on a besoin du volume entre les 2 cylindres de rayons r et $r+dr$:

$$dV = \pi (r+dr)^2 h - \pi r^2 h = \pi h \left[\underbrace{(r+dr)^2 - r^2}_{= 2r} \right] \approx \underbrace{2\pi r h}_{= 2\pi} dr \quad \text{à savoir}$$

6. Expression de la résistance thermique en symétrie sphérique



La diffusion se fait radialement soit : $\vec{j}_Q(r) = j_Q(r) \vec{e}_r$
 (avec $j_Q > 0$ si $T_1 > T_2$ et $j_Q < 0$ si $T_1 < T_2$)
 On note $\Phi_{th}(r)$ le flux de $\vec{j}_Q$ à travers la sphère de centre O et de rayon r, cela représente la puissance thermique qui traverse cette sphère : $\boxed{\Phi_{th}(r) = j_Q(r) 4\pi r^2}$

On considère le système élémentaire compris entre les deux sphères de rayons r et r+dr.



En régime stationnaire, la température du système est constante donc l'énergie perdue est égale à l'énergie reçue entre t et t+dt soit :

$$\Phi_{th} \text{ reçue} = \Phi_{th} \text{ perdue}$$

$$\Phi_{th}(r) dt = \Phi_{th}(r+dr) dt$$

d'où $\Phi_{th} = j_Q(r) 4\pi r^2 = \text{constante}$ indépendante de r

La loi de Fourier s'écrit : $j_Q = -\lambda \frac{dT}{dr}$ d'où $\Phi_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2$

⚠ ce n'est pas j_Q qui est constant c'est $\Phi_{th}(r)$

On sépare les variables T et r et on intègre :

$$\int_{R_1}^{R_2} -\frac{dr}{r^2} \Phi_{th} = 4\pi \lambda \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\text{avec } T_1 = T(r=R_1) \text{ et } T_2 = T(r=R_2)$$

$$\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \Phi_{th} = 4\pi \lambda (T_2 - T_1)$$

$$\text{Résistance thermique : } \boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th}} = \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{4\pi \lambda} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi \lambda R_1 R_2}}$$

R_{th} : si besoin le volume entre les 2 sphères de rayons r et r+dr
 et : $dV = \frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$
 $\approx 4\pi r^2 dr$

IV. Equation de diffusion en régime variable

L'équation de diffusion est l'équation différentielle vérifiée par $T(x, t)$. On la trouve en utilisant la loi de Fourier et en écrivant la conservation de l'énergie pour le système. En régime variable, à une dimension selon Ox, l'équation de conservation de l'énergie (en absence de création et d'absorption d'énergie) provenant de l'application du premier principe de la thermodynamique au système s'écrit :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}$$

On en déduit l'équation de diffusion en régime variable :

$$\text{Avec la loi de Fourier : } j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \text{ on obtient : } \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = +\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Qu'appelle-t-on coefficient de diffusion thermique ?

Soit $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ par la diffusion thermique
 Coefficient de diffusion ou diffusivité thermique

$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ par la diffusion de particules
 coeff. de diffusion ou diffusivité

Commentaires sur cette équation de diffusion:

Que deviennent ces équations à 3D en coordonnées cartésiennes ?

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} \text{ devient : } \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{\dot{q}} \quad \text{car} \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{\rho C} \Delta T} \quad \text{B}$$

la loi de Fourier s'écrit : $\vec{\dot{q}} = - \lambda \operatorname{grad} T$

diffusivité

On admet qu'en coordonnées cylindriques et sphériques, l'équation de diffusion garde cette expression. Dans les exercices, on démontre toujours l'équation de diffusion à 1D en cartésiennes puis on généralise à 3D en cartésiennes et on l'applique alors en sphériques ou en cylindriques suivant le besoin (l'énoncé donnera toujours l'expression du laplacien en cylindriques et en sphériques).

Que devient cette équation lorsqu'on change t en $-t$? Commenter.

l'éq. de diffusion pour t est : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C} \Delta T$

pour $-t$ est : $-\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C} \Delta T$

L'équation de diffusion est modifiée quand on change t en $-t$ cela traduit le fait la diffusion est un phénomène irréversible (en effet il ne se produit que des fortes vers les faibles températures)

Calculer un ordre de grandeur du temps de diffusion

Les murs d'une maison sont construits en béton et ont pour épaisseur $d = 20 \text{ cm}$. La température extérieure est de 0°C et la température intérieure est initialement 20°C . Donner un ordre de grandeur du temps de diffusion thermique à travers ces murs. Données : $\rho = 2200 \text{ kg.m}^{-3}$, $\lambda = 0,8 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ et $c = 880 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C} \Delta T \text{ donc par analyse dimensionnelle : } \frac{T}{t} = \frac{\lambda}{\rho C} \frac{T}{x^2}$$

car $\tau_{\text{diff}} = \frac{\rho C}{\lambda} d^2 = \frac{22 \cdot 10^3 \cdot 880}{0,8} \times 0,2^2 \text{ s}$

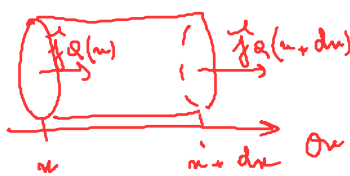
d : distance sur laquelle il y a diffusion pendant le temps τ

Que devient cette équation en régime stationnaire?

en régime stationnaire : T ne dépend pas du temps : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ soit $\boxed{\Delta T = 0}$

Démonstration de la relation de conservation de l'énergie:

On applique le 1^{er} principe de la thermodynamique au système élémentaire de section S compris entre x et $x+dx$; entre t et $t+dt$:



$$dU + \cancel{dQ_{\text{ext}}} = \cancel{dW} + \delta Q$$

$$\underbrace{\rho S dx C}_{\text{masse}} (T(x,t+dt) - T(x,t)) = + \delta Q_{\text{regu}} - \delta Q_{\text{perdue}}$$

$$\text{soit } \rho S dx C \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) dt = \dot{q}_x(x) S dt - \dot{q}_x(x+dx) S dt = - \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}(x,t) S dt dx$$

$$\text{d'où } \boxed{\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}}$$

Rq: dx est suffisamment petit pour que $T(x,t)$ soit uniforme dans le cylindre élémentaire