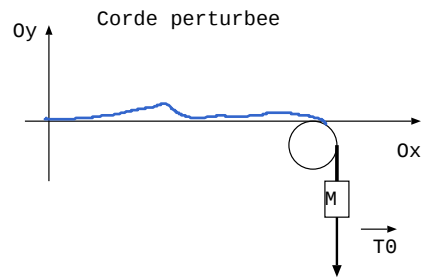
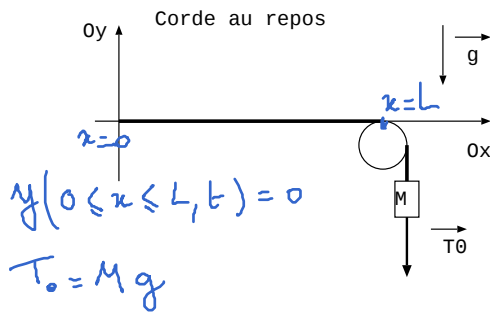


Chap OM 1: ondes dans les solides déformables

I. Ondes transversales sur une corde vibrante

1. Le dispositif

Soit une corde sans raideur (elle n'est donc pas élastique), inextensible, de masse linéique μ , de longueur L , tendue sous l'action de la force de tension $\vec{T}_0$. Au repos, la corde se confond avec l'axe Ox .



2. Les hypothèses

- On néglige l'action du poids sur la corde
- Les phénomènes dissipatifs sont négligés

- Le déplacement d'un point matériel de la corde est supposé vertical, soit un point de la corde de coordonnées $(x, 0)$ au repos se retrouve en $(x, y(x, t))$ lors de la vibration de la corde: l'onde est dite *transversale*

$$\vec{v}(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \hat{e}_y$$

$$\vec{a}(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \hat{e}_y$$

- Les déformations de la corde avec l'horizontale sont suffisamment faibles pour que l'on puisse supposer que l'angle $\alpha(x, t)$ que fait la corde avec l'horizontale est un infiniment petit du premier ordre.

Notations:

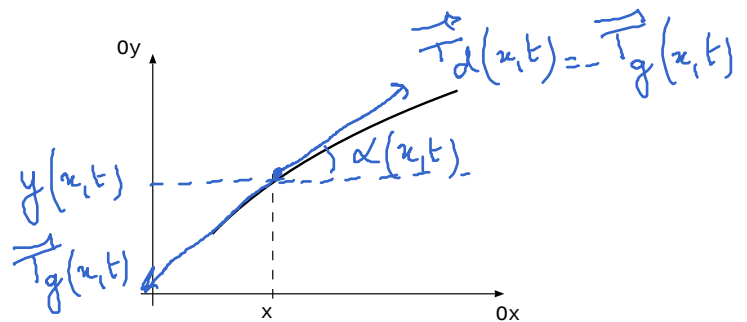
On note $\vec{T}_g(x, t)$ la tension exercée sur la corde en x à l'instant t par la corde qui se situe à gauche de x .

On note $\vec{T}_d(x, t)$ la tension exercée sur la corde en x à l'instant t par la corde qui se situe à droite de x .

$$\sin \alpha(x, t) \approx \alpha(x, t)$$

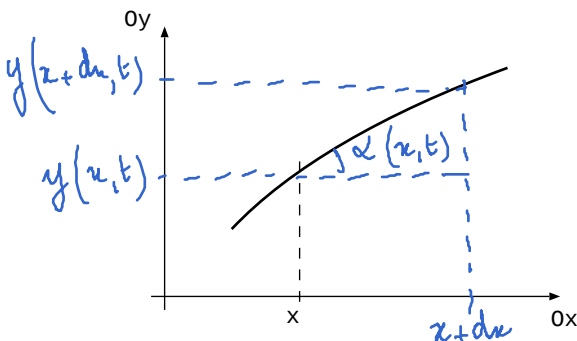
$$\tan \alpha(x, t) \approx \alpha(x, t)$$

$$\cos \alpha(x, t) \approx 1$$



3. Relation entre $\alpha(x, t)$ et $y(x, t)$

On considère le tronçon de corde compris entre x et $x + dx$ à l'instant t .

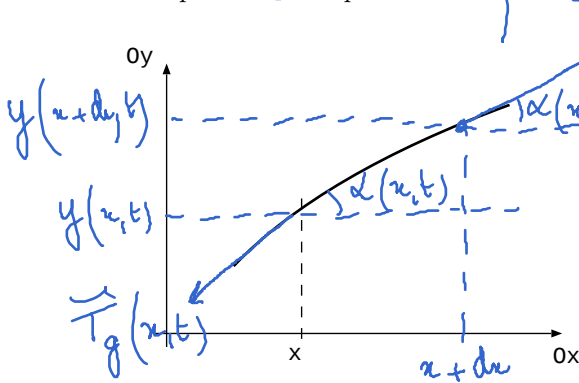


$$\tan \alpha(x, t) = \frac{y(x+dx, t) - y(x, t)}{dx} \approx \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$$

$$\alpha \text{ petit soit } \boxed{\alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)}$$

4. Equation de propagation

On appelle équation de propagation, l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $y(x, t)$. On la trouve en appliquant la RFD au tronçon de corde compris entre x et $x + dx$ à l'instant t . Ce tronçon a pour longueur au repos dx et pour masse μdx .



le bout de corde entre x et $x + dx$ subit :

- la tension de la corde à droite $\vec{T}_d(x+dx, t)$
- la tension de la corde à gauche $\vec{T}_g(x, t)$

$$\text{RFD: } \mu dx \vec{a}(x, t) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \vec{e}_y = \vec{T}_d(x+dx, t) + \vec{T}_g(x, t)$$

$$\text{On projette sur (Ox): } 0 = \|\vec{T}_d(x+dx, t)\| \underbrace{\cos \alpha(x+dx, t)}_{\approx 1} + \|\vec{T}_g(x, t)\| \underbrace{\cos(\pi - \alpha(x, t))}_{= -\cos(\alpha(x, t)) \approx -1}$$

$$\downarrow \text{ on } \|\vec{T}_d(x+dx, t)\| = \|\vec{T}_g(x, t)\| = \|\vec{T}_g(x+dx, t)\| = T_0$$

la tension est uniforme sur toute la corde

$$\text{On projette sur (Oy): } \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = T_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha(x+dx, t)\right) + T_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha(x, t)\right)$$

$$\begin{aligned} \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) &= T_0 \sin(\alpha(x+dx, t)) - T_0 \sin(\alpha(x, t)) \\ &= T_0 [\alpha(x+dx, t) - \alpha(x, t)] \\ &= T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t) dx \end{aligned}$$

$$\downarrow \text{ on } \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\text{soit } \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

on reconnaît une éq. de l'Alembert

$$\text{avec } \boxed{c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}} \text{ la célérité des ondes sur la corde}$$

Remarque 1: homogénéité:

$$\left[\left(\frac{T_0}{\mu} \right)^{1/2} \right] = \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}} \right)^{1/2} = (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2})^{1/2} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Remarque 2: les ondes sur la corde vont d'autant plus vite que la corde est tendue (T_0 grande) et peu dense (μ petite)

Remarque 3: attention de ne pas confondre:

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} : \text{célérité de l'onde sur la corde}$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} : \text{vitesse verticale d'un point sur la corde, point qui monte et qui descend}$$

Ordre de grandeur: calculer c pour une corde de piano cylindrique, en acier de masse volumique $\rho = 7200 \text{ kg/m}^3$, de rayon $r = 1 \text{ mm}$ et tendue sous $T = 3000 \text{ N}$.



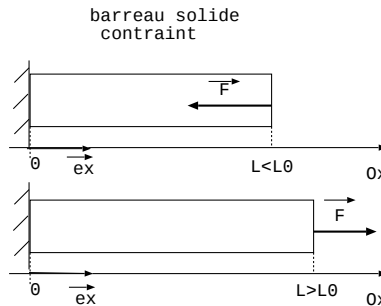
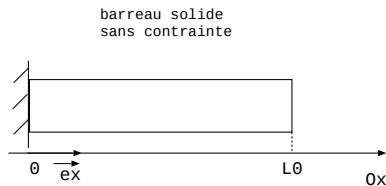
$$m = \rho \pi r^2 L \quad \text{soit} \quad \mu = \frac{m}{L} = \rho \pi r^2 = 226 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 364 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

II. Ondes longitudinales dans les solides

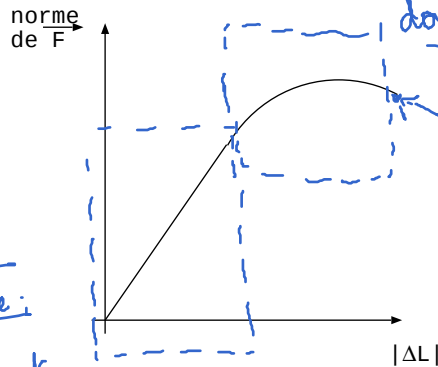
Les ondes se propagent dans les solides grâce aux compressions et dilatations infinitésimales des tranches de solide. Les forces exercées sur un solide pour le comprimer ou l'étirer font appel à la loi de Hooke.

1. Loi de Hooke



$$\vec{F} = E S \frac{\Delta L}{L_0} \hat{e}_x$$

Loi de Hooke
Module d'Young
section du barreau
allongement relatif
allongement



domaine élastique:
l'allongement est proportionnel à la force appliquée

domaine plastique

En de faibles déformations, la loi de Hooke traduit que l'allongement est proportionnel à la contrainte appliquée.

le module d'Young est d'autant plus élevé que le matériau est rigide.

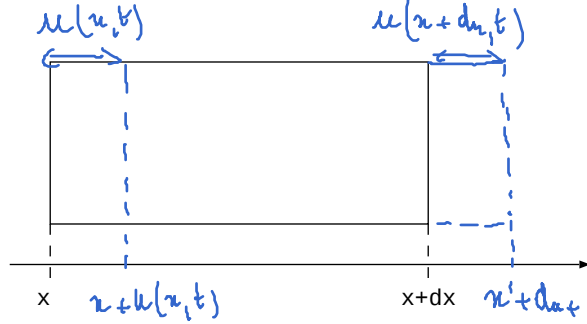
$$[E] = \left[\frac{F}{S} \right] = \text{Pa}$$

Ordre de grandeur: $E \sim 10^9 \text{ Pa} \sim 10^{11} \text{ Pa}$ pour un solide

2. Le dispositif et les notations (approche mésoscopique)

On étudie la propagation d'ondes selon Ox dans un solide de masse volumique ρ et de module d'Young E . On note $u(x, t)$ le déplacement à l'instant t du solide en placé en x au repos. On note $\vec{F}_d(x, t)$, la force exercée sur la surface S de solide en x à l'instant t par le solide à sa droite. La force suit la loi de Hooke: $\vec{F}_d(x, t) = ES \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \vec{e}_x = -\vec{F}_g(x, t)$

Interprétation de la force: on s'appuie sur le tronçon de solide de section S située entre x et $x + dx$ au repos



Longueur au repos: $l_0 = dx$

Longueur en présence de l'onde:

$$l = [x + dx + u(x + dx, t)] - [x + u(x, t)] = dx + u(x + dx, t) - u(x, t) = dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)$$

Allongement: $l - l_0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx$

Allongement relatif:

$$\frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

la force suit bien la loi de Hooke:

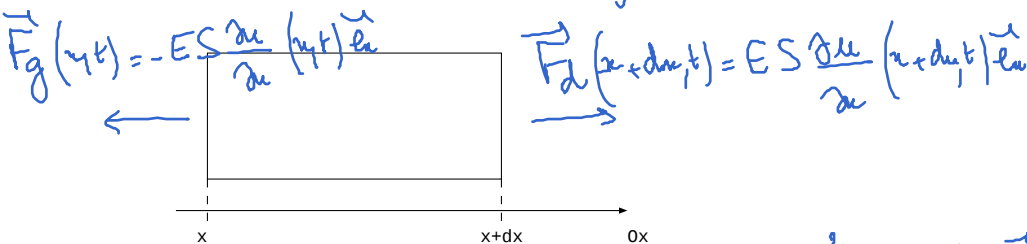
$$\vec{F}_d = ES \frac{l - l_0}{l_0} \vec{e}_x$$

pour $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \geq 0$: $u \uparrow$ quand $x \uparrow$: le solide se dilate

$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) < 0$: $u \downarrow$ quand $x \uparrow$: le solide se comprime

3. Equation de propagation

On appelle équation de propagation, l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $u(x, t)$. On la trouve en appliquant la RFD au tronçon de solide de section S compris entre x et $x + dx$. Ce tronçon a pour longueur au repos dx et pour masse $dm = \rho S dx$. On néglige le poids.



RFD appliquée au système élémentaire: $\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \vec{e}_x = \vec{F}_d(x + dx, t) + \vec{F}_g(x, t)$

en projection sur (Ox) : $\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = ES \frac{\partial u}{\partial x}(x + dx, t) - ES \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$

$$= ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx$$

$$\downarrow \text{ ou } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

on reconnaît une équation de d'Alembert avec $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ célérité des ondes

Remarque 1: homogénéité:

$$\left[\left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \right] = \left(\frac{\text{Pa}}{\text{kg m}^{-3}} \right)^{1/2} = \left(\frac{\text{kg ms}^{-2} \text{m}^{-2}}{\text{kg m}^{-3}} \right)^{1/2} = \left(\text{m}^2 \text{s}^{-2} \right)^{1/2} = \text{ms}^{-1}$$

Remarque 2: les ondes dans le solide vont d'autant plus vite que le matériau est rigide (E est grand) et peu dense (ρ petit).

Remarque 3: attention de ne pas confondre:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} : \text{élément de l'onde}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} : \text{itesse horizontale de la tranche de solide en } x \text{ à } t$$

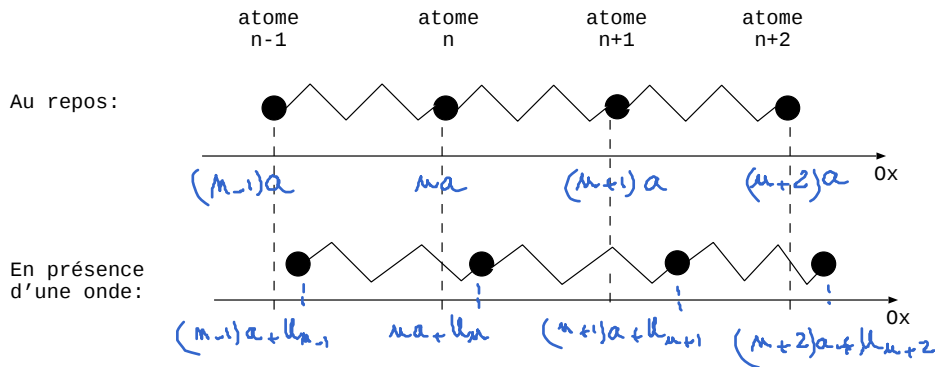
Ordre de grandeur: pour un solide: $c = \sqrt{\frac{10^9}{10^3}} = \sqrt{10^6} = 1000 \text{ ms}^{-1}$

4. Onde dans un solide : approche microscopique

On modélise un solide par des chaînes linéaires d'atomes identiques de masse m reliés entre eux par des ressorts de constante de raideur k et de longueur à vide a (a représente la distance à l'équilibre entre deux atomes voisins).

On étudie une chaîne d'atomes selon Ox .

On note na la position à l'équilibre de l'atome n et $u_n(t)$, le déplacement de l'atome n à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre.



On applique la RFD à l'atome n .

$$\begin{array}{c} \text{Diagram of atom } n \text{ and } n-1 \text{ with spring force } \vec{F}_{n-1/n} \\ \vec{F}_{n-1/n} = -k(l - l_0) \vec{e}_n = -k(u_n - u_{n-1}) \vec{e}_n \end{array}$$

$$l = a + u_n - u_{n-1} > l_0 = a$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram of atom } n \text{ and } n+1 \text{ with spring force } \vec{F}_{n+1/n} \\ \vec{F}_{n+1/n} = +k(l - l_0) \vec{e}_n = k(u_{n+1} - u_n) \vec{e}_n \end{array}$$

$$l = a + u_{n+1} - u_n > l_0 = a$$

RFD appliquée à l'atome n :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -k(u_n - u_{n-1}) + k(u_{n+1} - u_n)$$

$$\boxed{\frac{d^2 u_n}{dt^2} = -\frac{k}{m} [u_n - u_{n-1} + u_n - u_{n+1}]}$$

(les u_n ne doivent pas se simplifier !)

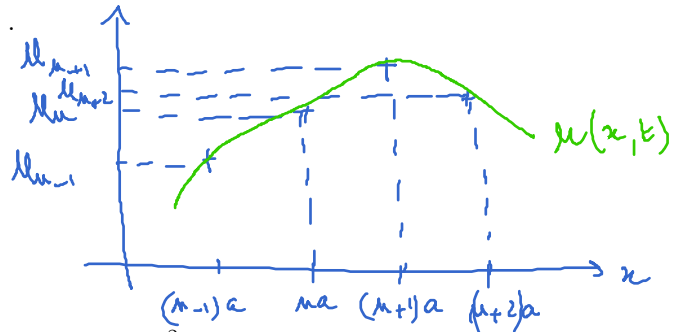
Le modèle précédent fait appel aux fonctions discrètes $u_{n-1}(t)$, $u_n(t)$, $u_{n+1}(t)$... Le déplacement $u(t)$ n'est défini que sur un atome. On cherche à passer à une description continue en introduisant une fonction $u(x, t)$ qui caractérise le déplacement à l'instant t de l'atome dont la position d'équilibre est x .

La fonction $u(x, t)$ en réalité n'est définie qu'aux valeurs de x où se trouvent des atomes. Mais comme la distance entre deux atomes est très petites (de l'ordre de 100 pm), on fabrique par continuité mathématique la fonction $u(x, t)$.

$$u(x = (n-1)a, t) = u_{n-1}(t)$$

$$u(x = na, t) = u_n(t)$$

$$u(x = (n+1)a, t) = u_{n+1}(t)$$



La RFD appliquée à l'atome n a permis de trouver la relation: $m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k(u_{n+1} - u_n + u_{n-1} - u_n)$. En remplaçant par $u(x, t)$ on obtient:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x=na, t) &= k [u((n+1)a, t) - u(na, t) + u((n-1)a, t) - u(na, t)] \\ &= k \left[\frac{\partial u}{\partial x}(na, t) - \frac{\partial u}{\partial x}((n-1)a, t) \right] a \\ &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(na, t) a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{m}{ka^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

on reconnaît une eq. de d'Alembert
avec $\boxed{c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}}}$ célérité des ondes

Remarque 1: homogénéité:

$$\left[\left(\frac{ka^2}{m} \right)^{1/2} \right] = \left[\left(\frac{Fa}{m} \right)^{1/2} \right] = \left(\frac{\text{kg ms}^{-2} \text{m}}{\text{kg}} \right)^{1/2} = \text{ms}^{-1}$$

$F = k \Delta x$

Remarque 2: les ondes dans le solide vont d'autant plus vite que les liaisons entre atomes sont intenses (le grand) et que les atomes sont légers (un petit)

Remarque 3: attention de ne pas confondre:

$$c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}} : \text{célérité de l'onde}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} : \text{intens du solide en } x \text{ à } t$$

