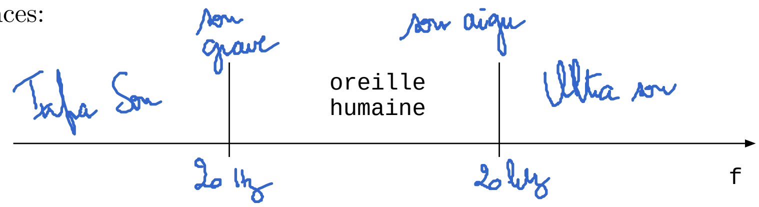
Chapitre OM3 : ondes sonores dans les fluides

Les ondes sonores sont des ondes longitudinales

Dans un fluide, les tranches de fluide se compriment et se détendent. De proche en proche, la surpression se propage dans la direction dans laquelle elle a été induite. Ce phénomène se produit sans déplacement de matière, et nécessite un milieu matériel (le son ne se propage pas dans le vide).

Domaines de fréquences:



Domaines de longueur d'onde:

$\lambda = \frac{c}{f}$

$c_{air} = 340\ m/s$: $\lambda_{grave} = \frac{340}{20} = 17\ m$ et $\lambda_{aigu} = \frac{340}{20.10^3} = 1{,}7\ cm$

$c_{eau} = 1400\ m/s$: $\lambda_{grave} = \frac{1400}{20} = 70\ m$ et $\lambda_{aigu} = \frac{1400}{20.10^3} = 7\ cm$

I. L'équation de propagation

1. Hypothèses

- On néglige le poids

- Les compressions et les détentes sont suffisamment rapides pour que l'on puisse négliger les transferts thermiques entre deux tranches de fluide voisines.

Hypothèse : on suppose donc les transformations adiabatiques

- Les compressions et les détentes successives sont de très faible amplitude, les inhomogénéités créées ne sont pas très importantes.

Hypothèse : on suppose donc les transformations réversibles

Les transformations adiabatiques et réversibles sont dites isentropiques et sont caractérisées par un coefficient de compressibilité isentropique défini par:

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} \text{ ou } \chi_S = +\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}$$

quand $P \uparrow$, le volume $V \downarrow$ le signe $-$ sert à avoir $\chi_S > 0$

quand $P \uparrow$, $\rho \uparrow$ donc le signe $+$ est là pour avoir $\chi_S > 0$

$[\chi_S] = Pa^{-1}$

Le χ_S est d'autant plus grand que le milieu est compressible (V varie beaucoup quand P varie)

$V = \frac{1}{\rho}$ donc $\ln V = -\ln \rho$ et par dérivation : $\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$

d'où $\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = +\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}$

Ordre de grandeur : χ_s est de l'ordre de $10^{-5}\ Pa^{-1}$ pour un gaz (soit $\frac{1}{P}$) et de l'ordre de $10^{-10}\ Pa^{-1}$ pour un liquide.

Utilisation du coefficient de compressibilité isentropique :

pour des petites variations de pression et de volume de l'état (P_0, V_0) à l'état (P, V),
on écrit: $\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{V_0}\frac{V-V_0}{P-P_0}\Big|_S$

pour des petites variations de pression et de masse volumique de l'état (P_0, ρ_0) à l'état (P, ρ),
on écrit: $\chi_S = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\rho-\rho_0}{P-P_0}\Big|_S$

2. Notations

surpression

	à l'équilibre	hors équilibre
Pression	P_0	$P(x,t) = P_0 + \boxed{p(x,t)}$
Masse volumique	ρ_0	$\rho(x,t) = \rho_0 + \boxed{\mu(x,t)}$
Déplacement d'une tranche de fluide	0	$\xi(x,t) = 0 + \boxed{\xi(x,t)}$
Vitesse d'une tranche de fluide	$\vec{0}$	$\vec{v}(x,t) = \vec{0} + \boxed{\vec{v}(x,t)}$

infiniment petits d'ordre 1

ordre 0

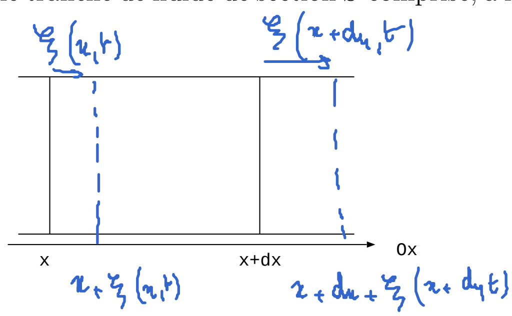
Relation entre vitesse et déplacement de la tranche de fluide: $\vec{v}(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}(x,t)\,\vec{e}_x$

Approximation acoustique : dans l'hypothèse de l'approximation acoustique, les grandeurs $p(x,t)$, $\xi(x,t)$, $v(x,t)$ et $\mu(x,t)$ sont des infiniment petits d'ordre 1. L'approximation acoustique consiste donc à faire dans tous les calculs, des développements limités à l'ordre 1 pour linéariser les équations de la mécanique et de la thermodynamique.

ex : $p(x,t)\,\rho(x,t) = \underbrace{p(x,t)\,\rho_0}_{\text{ordre 1 : on garde}} + \underbrace{p(x,t)\,\mu(x,t)}_{\text{ordre 2 : on néglige}}$

3. Equations de propagation

Le système élémentaire étudié est une tranche de fluide de section S comprise, à l'équilibre, entre les abscisses x et $x + dx$.



Equation mécanique:

éq. d'Euler

$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{v}\right] = \cancel{\rho\vec{g}} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P$

on néglige le poids

P_0, ρ_0 : ordre 0

p, μ, v : ordre 1

ordre 1 × ordre 1 = ordre 2 : on néglige

$[\rho_0 + \mu]\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\rho_0 + \mu]\underbrace{(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{v}}_{\text{ordre 2 : on néglige}} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P_0 + p)$

ordre 0 × ordre 1 = ordre 1 on garde

$\rho_0\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p$ avec $p(x,t)$ soit $\rho_0\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x$

après projection sur $(0x)$: $\boxed{\rho_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$ (1)

Equation thermodynamique:

$$\chi_S = \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\rho_0+\mu}\,\frac{\rho-\rho_0}{P-P_0} = \frac{1}{\underbrace{\rho_0+\mu}_{\text{ordre 2 : on néglige}}}\,\frac{\mu}{p} = \frac{1}{\rho_0}\,\frac{\mu}{p} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mu = \chi_S \rho_0\, p}$$

Equation de conservation de la masse:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div}\Big(\underbrace{\rho_0\vec{v}}_{\substack{\text{ordre 1}\\ \text{on garde}}} + \underbrace{\mu\vec{v}}_{\substack{\text{ordre 2 :}\\ \text{on néglige}}}\Big) + \frac{\partial(\cancel{\rho_0}+\mu)}{\partial t} = 0$$

, cette dérivée nulle

soit $\rho_0 \operatorname{div}\vec{v} + \dfrac{\partial \mu}{\partial t} = 0$

avec $\vec{v} = v(x,t)\,\vec{e}_x$

soit $\boxed{\rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial \mu}{\partial t} = 0}$ (2)

D'où le système d'équations couplées vérifiées par $v(x,t)$ et $p(x,t)$:

On remplace μ par son expression dans l'équation (2) : $\rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} + \rho_0 \chi_S \dfrac{\partial p}{\partial t} = 0$

soit
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} + \chi_S \dfrac{\partial p}{\partial t} = 0 \\[2ex] \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

Equation de propagation de la surpression: on rappelle que $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}\right] = +\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right] = +\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\chi_S\frac{\partial p}{\partial t}\right] = +\chi_S\rho_0\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

soit $\boxed{\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0\chi_S \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0}$

on reconnaît une ép. de d'Alembert avec $c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$: vitesse des ondes

Equation de propagation de la vitesse:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\chi_S\frac{\partial p}{\partial t}\right] = -\chi_S\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right] = -\chi_S\frac{\partial}{\partial t}\left[-\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}\right] = \rho_0\chi_S\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

soit $\boxed{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho_0\chi_S \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0}$

l'onde de vitesse et l'onde de surpression se propagent à la même vitesse $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}}$ B

Remarque 1: vérification de l'homogénéité :

$$\left[\left(\frac{1}{\rho_0 \chi_S}\right)^{1/2}\right] = \left[\left(\frac{P}{\rho_0}\right)^{1/2}\right] = \left[\left(\frac{F}{\rho_0 S}\right)^{1/2}\right] = \left(\frac{\cancel{kg}\, m s^{-2}}{\cancel{kg} m^{-3}\, m^2}\right)^{1/2} = \left(m^2 s^{-2}\right)^{1/2} = m s^{-1}$$

Remarque 2: la vitesse des ondes sonores est d'autant plus grande que le fluide est peu compressible (χ_S petit) et peu dense (ρ_0 petit).

Remarque 3 : ordres de grandeur de la vitesse des ondes sonores

dans un gaz: $\rho_0 \simeq 1\ kg\,m^{-3}$ $\chi_S = 10^{-5}\ Pa^{-1}$ $c = \dfrac{1}{\sqrt{10^{-5}}} \simeq 300\ m s^{-1}$

dans un liquide: $\rho_0 = 10^3\ kg\,m^{-3}$ $\chi_S = 10^{-10}\ Pa^{-1}$ $c = \dfrac{1}{\sqrt{10^{-7}}} \simeq 3000\ m s^{-1}$

dans un solide: $C = \sqrt{\dfrac{E}{\rho_0}}$ $E = 10^{10}\ Pa$ $\rho_0 \simeq 10^3\ kg\,m^{-3}$ $C = \sqrt{10^7} \simeq 3000\ m s^{-1}$

4. Cas très important du gaz parfait

$$PV = nRT = \frac{m RT}{M} \quad \text{soit} \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$$

$\chi_S = -\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial P}$ on applique les lois de Laplace au GP en transformation adiabatique réversible : $PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$

avec $\rho = \dfrac{m}{V}$ et $m = $ cste $\quad P\rho^{-\gamma} = P_0 \rho_0^{-\gamma}$

$\ln P + \gamma \ln V = $ cste en différenciant : $\dfrac{dP}{P} + \gamma \dfrac{dV}{V} = 0 \Rightarrow -\dfrac{dV}{V} = +\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{dP}{P}$

soit $-\dfrac{1}{V}\dfrac{dV}{dP} = \boxed{\dfrac{1}{\gamma P} = \chi_S}$

$\ln P - \gamma \ln \rho = $ cste en différenciant : $\dfrac{dP}{P} - \gamma\dfrac{d\rho}{\rho} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\rho}{\rho} = \dfrac{1}{\gamma P} dP$

d'où $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{dP} = \boxed{\chi_S = \dfrac{1}{\gamma P}}$

A retenir : $\boxed{C = \sqrt{\dfrac{\gamma R T_0}{M}}}$

$$C = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_S}} = \sqrt{\frac{RT_0}{P_0 M} \times \gamma P_0} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

AN: air : $T = 300\ K$ $\gamma = 1,4$

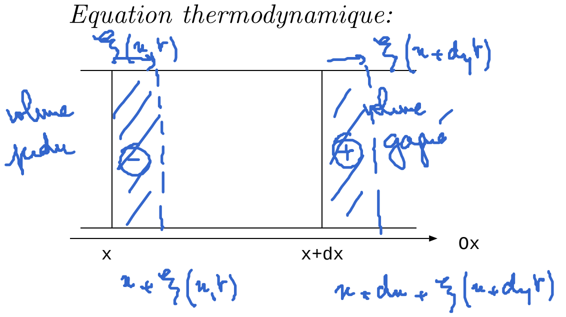
$M = 29\ g\,mol^{-1} = 29 \cdot 10^{-3}\ kg\,mol^{-1}$

$\underline{C = 340\ m s^{-1}}$

5. Remarques utiles pour les exercices

Dans certains problème on peut demander d'écrire les équations mécaniques et thermodynamiques en utilisant les grandeurs physiques: $p(x,t)$ (la surpression) et $\xi(x,t)$ (le déplacement de le tranche de fluide en x à l'instant t).

Equation thermodynamique:



$$\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{V_0}\frac{V-V_0}{P-P_0} = -\frac{1}{p}\frac{V-V_0}{V_0}$$

variation relative de volume

$$V_0 = S\,dx$$

$$V - V_0 = +\xi(x+dx,t)\,S - \xi(x,t)\,S = S\frac{\partial \xi}{\partial x}dx$$

d'où $\boxed{\chi_S = -\frac{1}{p}\frac{\partial \xi}{\partial x}}$

Equation mécanique: Ép. de Navier-Stokes : $\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}}_{\text{ordre 2 négligé}}\right] = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\underset{P_0+p}{P} + \underbrace{\cancel{\rho\vec{g}}}_{}$ poids négligé

$$\underbrace{(\rho_0 + \overbrace{\mu}^{\text{ordre 2 : négligé}})}_{\text{ordre 1}}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\vec{e}_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x$$

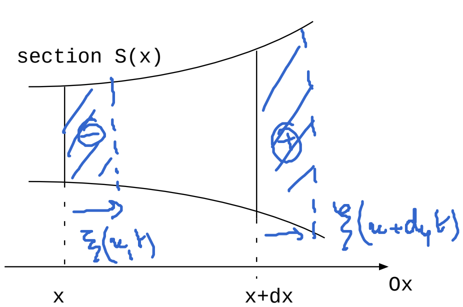
d'où $\boxed{\rho_0\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$

d'où l'équation de propagation vérifiée $\xi(x,t)$:

On a : $p = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial \xi}{\partial x}$ et $\rho_0\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]$

d'où $\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \rho_0\chi_S\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0}$ ép. de d'Alembert avec $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_S}}$ vitesse des ondes

Il existe aussi une situation où la section du tuyau est variable, l'écriture de l'équation thermodynamique se fait de la façon suivante:



$$\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{V_0}\frac{V-V_0}{P-P_0}$$

d'où $V_0 = S\,dx$

$$V - V_0 = +\xi(x+dx,t)\,S(x+dx) - \xi(x,t)\,S(x) = \frac{\partial(\xi(x,t)S(x))}{\partial x}dx$$

$$\boxed{\chi_S = -\frac{1}{S(x)}\frac{\partial(\xi(x,t)S(x))}{\partial x}}$$

II. Solutions de l'équation de propagation

1. Définition de l'impédance acoustique

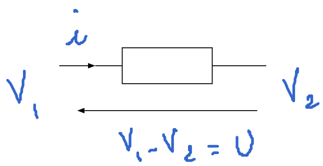
On définit l'impédance acoustique notée Z à partir d'une analogie avec l'électricité.

Impédance en électricité

$U = V_1 - V_2$: ddp qui met en mouvement les charges

$i = \frac{dq}{dt}$: flux des charges

$Z = \frac{U}{i}$

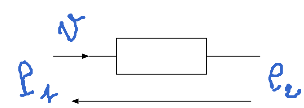


Unité de Z: $\Omega = V.A^{-1}$

Impédance en acoustique

$p = P_1 - P_2$: différence de pression qui met en mouvement le fluide

$v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$: vitesse des tranches de fluide



$\boxed{Z = \frac{p}{v}}$

Unité de Z: $Pa\ m^{-1}s$

2. Solution en OPPH

On rappelle les équations couplées vérifiées par la vitesse $\vec{v}(x,t)$ et la surpression des tranches de fluide:

$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \overset{(1)}{=} -\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial x} \overset{(2)}{=} -\chi_s \frac{\partial p}{\partial t}$

Solution en $OPPH^+$: on choisit $v(x,t) = V_0 \cos(\omega t - kx)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -(-k) V_0 \sin(\omega t - kx)$

$\frac{\partial p}{\partial t} \overset{(2)}{=} -\frac{1}{\chi_s}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{k V_0}{\chi_s} \sin(\omega t - kx)$

on intègre / à t : $k = \frac{\omega}{c}$

$p = \frac{k V_0}{\chi_s \omega} \cos(\omega t - kx) \overset{\downarrow}{=} \frac{V_0}{\chi_s c} \cos(\omega t - kx)$

$Z = \frac{p}{v} = +\frac{1}{\chi_s c}$

$\frac{\partial v}{\partial t} = -V_0 \omega \sin(\omega t - kx)$

$\frac{\partial p}{\partial x} \overset{(1)}{=} -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \rho_0 V_0 \omega \sin(\omega t - kx)$

on intègre / à x. $k = \frac{\omega}{c}$

$p = \frac{\rho_0 V_0 \omega}{k} \cos(\omega t - kx) \overset{\downarrow}{=} \rho_0 c \cos(\omega t - kx)$

$\boxed{Z = \frac{p}{v} = \rho_0 c = \frac{1}{\chi_s c}}$

← cohérent avec $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$ soit $c^2 \rho_0 \chi_s = 1$

Solution en $OPPH^-$: on choisit $v(x,t) = V_0 \cos(\omega t + kx)$

$\frac{\partial v}{\partial t} = -V_0 \omega \sin(\omega t + kx)$

$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \rho_0 V_0 \omega \sin(\omega t + kx)$

⚠ pas de cste d'intégration car les cstes ne se propagent pas

on intègre / à x : $k = \frac{\omega}{c}$

$p = -\frac{\rho_0 V_0 \omega}{k} \cos(\omega t + kx) \overset{\downarrow}{=} -V_0 \rho_0 c \cos(\omega t + kx)$ soit $\boxed{Z = \frac{p}{v} = -\rho_0 c = -\frac{1}{\chi_s c}}$

A retenir:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{p}{v} = +\rho_0 c = +\dfrac{1}{\chi_s c} & \text{pour une OPPH}^+ \\ \dfrac{p}{v} = -\rho_0 c = -\dfrac{1}{\chi_s c} & \text{pour une OPPH}^- \end{array}}$$

3. Solution en OS

On rappelle les équations couplées vérifiées par la vitesse $\vec{v}(x,t)$ et la surpression des tranches de fluide:
$\rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x} \overset{(2)}{=} -\chi_s \dfrac{\partial p}{\partial t}$

Solution en OS: on choisit $p(x,t) = p_0 \cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\omega p_0 \sin(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \overset{(2)}{=} -\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} = \omega p_0 \chi_s \sin(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi) \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

on intègre / à x: $v = -\dfrac{\omega p_0 \chi_s}{k} \sin(\omega t + \varphi)\sin(kx + \psi) = -p_0 \chi_s c \sin(\omega t + \varphi)\sin(kx + \psi)$

Remarque 1 : l'impédance acoustique pour une OS: dépend de x et de t donc l'impédance n'a pas d'utilisation

Remarque 2 : Les ondes de surpression et de vitesse sont
- en quadrature temporelle
- en quadrature spatiale

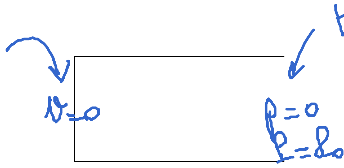
$$p = p_0 \cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$$

$$v = -p_0 \chi_s c \sin(\omega t + \varphi)\sin(kx + \psi)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{les noeuds de } v \text{ sont des ventres de } p \\ \text{les noeuds de } p \text{ sont des ventres de } v \end{array}}$$

Conditions aux limites d'un tuyau sonore:

tuyau bouché: noeuds de v, ventre de p

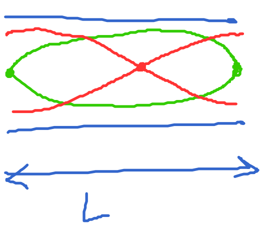


tuyau ouvert: noeuds de p, ventres de v

Tuyaux ouverts aux deux extrémités

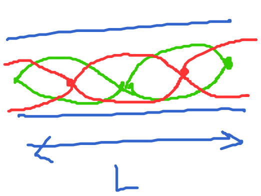
— ondes de p
— ondes de v

$n = 1$ fondamental



$L = \dfrac{\lambda_1}{2}$

$n = 2$

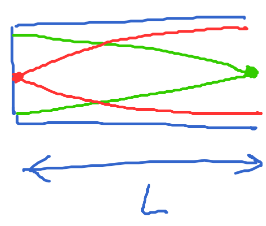


$L = 2\dfrac{\lambda_2}{2}$

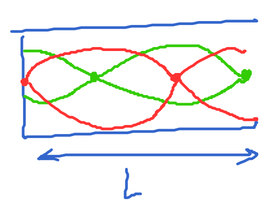
résumé: $L = n\dfrac{\lambda_n}{2}$ $\quad \lambda_n = \dfrac{2L}{n}$ $\quad k_n = \dfrac{2\pi}{\lambda_n} = \dfrac{2\pi}{2L} n$

$\omega_n = k_n c$

Tuyaux ouverts à une extrémité



$L = \dfrac{\lambda_1}{4}$ $\quad n = 1$



$L = \dfrac{3\lambda_2}{4}$ $\quad n = 2$

résumé : $L = \dfrac{(2n-1)\lambda_n}{4}$ $\quad \lambda_n = \dfrac{4L}{2n-1}$

$k_n = \dfrac{2\pi}{\lambda_n} = 2\pi \dfrac{(2n-1)}{4L}$ $\quad \omega_n = k_n c$

III. Approche énergétique

1. Retour à l'analogie électro-acoustique:

$U = V_1 - V_2$: ddp qui met en mvt des charges

$i =$ flux de charges

$Z = \dfrac{U}{i}$

$P = U \times i$ en W

$p = P - P_0$: ddp qui met en mvt le fluide

$v = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}$

$Z = \dfrac{p}{v}$

$\boxed{P = p \times v}$ $[P] = \dfrac{F \times v}{S} = W.m^{-2}$

2. Intensité acoustique:

On définit l'intensité acoustique par $I =< p.v >$: c'est la moyenne temporelle du produit de la surpression avec la vitesse particulaire.

L'unité est: $W.m^{-2}$

L'intensité acoustique est une grandeur algébrique:

- de signe positif lorsque l'onde se propage selon $+Ox$
- de signe négatif lorsque l'onde se propage selon $-Ox$.

La puissance acoustique est donc le produit : $\boxed{P = I \times S}$

<u>Cas d'une OPPH</u> : il faut retenir que $< \cos^2(\omega t) >=< \sin^2(\omega t) >= \dfrac{1}{2}$ et $< \cos(\omega t)\sin(\omega t) >= 0$.

exp 1 : on prend $p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$ $\dfrac{p}{v} = +\rho_0 c$ OPPH⁺

On en déduit $v(x,t) = \dfrac{p_0}{\rho_0 c} \cos(\omega t - kx)$

Puis $I = \langle p\, v \rangle = \dfrac{p_0^2}{\rho_0 c} \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \dfrac{p_0^2}{2\rho_0 c} > 0$ l'énergie se propage dans le sens de l'onde

exp 2 : on prend $v(x,t) = v_0 \cos(\omega t + kx)$ $\dfrac{p}{v} = -\rho_0 c$ OPPH⁻

On en déduit $p(x,t) = -\rho_0 c\, v_0 \cos(\omega t + kx)$

Puis $I = \langle p\, v \rangle = -\rho_0 c\, v_0^2 \langle \cos^2(\omega t + kx) \rangle = -\rho_0 c \dfrac{v_0^2}{2} < 0$ l'énergie se propage dans le sens de l'onde

<u>Cas d'une OS</u> : on prend $p(x,t) = p_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$

On utilise $\rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$ pour exprimer $v(x,t) = v_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx + \psi)$

Puis $I = \langle p\, v \rangle = p_0 v_0 \langle \cos(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) \rangle \cos(kx + \psi) \sin(kx + \psi) = 0$

dans une OS l'énergie ne se propage pas

3. Intensité en décibel :

On définit l'intensité acoustique en décibel par: $I_{dB} = 10log(\frac{|I|}{I_0})$ avec $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$.

Ordres de grandeur :

Son	seuil d'audition	voix normale à 1 m	seuil de douleur
I	$10^{-12}\ W.m^{-2}$	$10^{-6}\ W.m^{-2}$	$1\ W.m^{-2}$
I_{dB}	$0\ dB$	$60\ dB$	$120\ dB$

Retour à l'intensité $|I|$ à partir de I_{dB}:

$I_{dB} = 10 \log \frac{|I|}{I_0}$ soit $\log \frac{|I|}{I_0} = \frac{I_{dB}}{10}$ soit $|I| = I_0\, 10^{\frac{I_{dB}}{10}}$

Application 1 : deux personnes parlent avec la même intensité acoustique $I_{dB} = 60\ dB$. Calculer l'intensité résultante en décibel sachant que les intensités acoustiques s'ajoutent.

pour 1 personne : $I_{1dB} = 10 \log\left(\frac{|I_1|}{I_0}\right)$

pour 2 personnes : $I_{2dB} = 10 \log\left(\frac{|I_2|}{I_0}\right) = 10 \log\left(\frac{2|I_1|}{I_0}\right) = \underbrace{10 \log 2}_{3dB} + \underbrace{10 \log\left(\frac{|I_1|}{I_0}\right)}_{I_{1dB}} = 63\ dB$

Application 2 : une onde sonore plane progressive harmonique se propage dans l'air de caractéristiques: $P_0 = 1\ bar$, $T_0 = 293\ K$, $M = 29\ g/mol$ et $\gamma = 1,4$. Cette onde correspond à une intensité de $80\ dB$. Calculer la surpression maximale, la vitesse particulaire maximale et le déplacement maximal des tranches de fluide au passage de cette onde de fréquence $f = 1\ kHz$. L'approximation acoustique est-elle justifiée?

$I_{dB} = 10 \log\left(\frac{|I|}{I_0}\right) \Rightarrow |I| = I_0\, 10^{\frac{I_{dB}}{10}} = 10^{-12}\, 10^{\frac{80}{10}} = 10^{-4}\ W\,m^{-2}$

OPPH$^+$: $p = p_0 \cos(\omega t - kx)$ $\quad v = \frac{p_0}{\rho_0 c} \cos(\omega t - kx)$ $\quad I = \langle pv \rangle = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c}$

$\frac{p}{v} = +\rho_0 c$

d'où $p_0 = \sqrt{2 I \rho_0 c} = \sqrt{2.10^{-4} \times 1,2 \times 340} = 0,28\ Pa$ $\qquad v_0 = \frac{p_0}{\rho_0 c} = 0,69\ mm\,s^{-1}$

$\rho_0 = \frac{P_0 M}{R T_0} = 1,2\ kg.m^{-3}$

$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} = 340\ m\,s^{-1}$

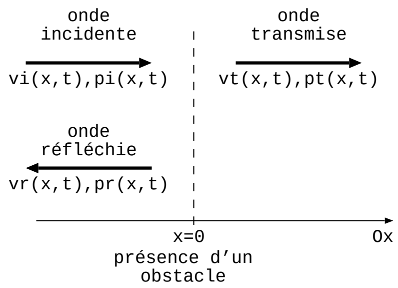
$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = v_0 \cos(\omega t - kx)$ soit en intégrant / à t : $\xi = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t - kx)$

$\xi_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{2\pi f} = 1,10.10^{-7}\ m$

$p \ll P_0$, ξ et v sont bien des infiniment petits d'ordre 1

IV. **Equations de continuité lors d'un changement de milieu**

Quand une onde sonore incidente arrive sur un obstacle, elle génère une onde réfléchie et une onde transmise qui ont la même pulsation que l'onde incidente mais des amplitudes et des phases différentes.



Onde résultante:

Pour $x < 0$:

Pour $x > 0$:

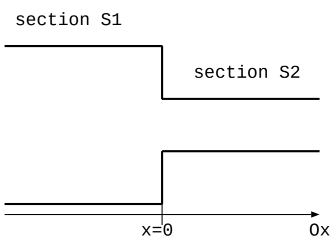
Les équations de continuité permettent de trouver les expressions de ces coefficients.

Sur une surface libre (sans paroi solide) on a:

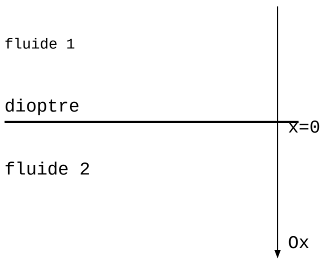
- La continuité de la surpression:

- La continuité du débit volumique:

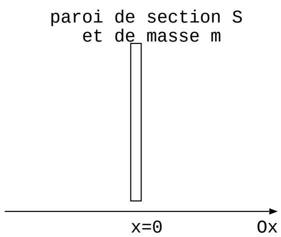
Exemple 1:



Exemple 2:



Attention: en présence d'une paroi rigide la surpression n'est pas continue, les pressions peuvent être différentes des deux côtés de la paroi. On doit appliquer la RFD à la paroi pour trouver la relation entre $p(x = 0^-, t)$ et $p(x = 0^+, t)$.

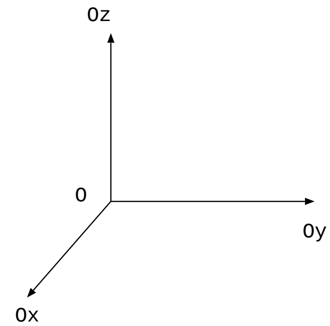


V. **Ondes sphériques**

L'équation de d'Alembert pour la perturbation $p(M, t)$ à 3 dimensions s'écrit:

Solution en ondes sphériques

Une source placée en un point O émet une onde telle que tous les points sur une même sphère de centre O et de rayon r ont la même amplitude de perturbation (toutes les directions de l'espace sont équivalentes). La perturbation ne dépend donc que du temps et de r en coordonnées sphériques: une telle onde s'appelle une onde sphérique.



1- On donne en coordonnées sphériques : $\Delta p(r,t) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rp(r,t))}{\partial r^2}$. Montrer que $r.p(r,t)$ vérifie une équation de d'Alembert à une dimension.

2- Proposer une solution en onde sphérique progressive harmonique. En déduire $v(r,t)$. On rappelle l'équation mécanique $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}$. Déterminer I, l'intensité acoustique puis P, la puissance rayonnée par l'onde à travers une sphère de rayon r et de centre O. Commenter.