

CCINP Physique PC 2024

Des plasmas pour la fusion thermonucléaire

Proposition de corrigé

Ce corrigé a été rédigé par David LASNE. N'hésitez pas à me signaler par mail (david.lasne@ac-normandie.fr) toute coquille ou erreur. Vous pouvez le distribuer à vos élèves.

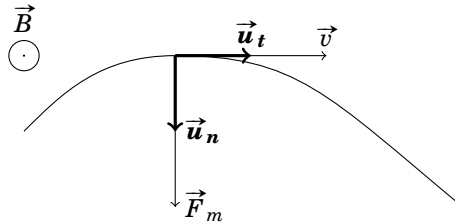
Partie I - Confinement magnétique du plasma

I.1 - Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

Q1. C'est la démonstration du cours, en appliquant le théorème d'AMPÈRE sur un contour rectangulaire. On trouve $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{d} I \vec{u}_z$.

Q2. Par définition, la puissance de la force magnétique est $\mathcal{P} = \vec{F}_m \cdot \vec{v}$. Or la force magnétique s'écrit $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ donc est orthogonale à la vitesse : sa puissance est donc nulle. D'après le théorème de la puissance cinétique, si la force magnétique est la seule force extérieure, l'énergie mécanique se conserve (donc la norme de la vitesse est constante – mais pas sa direction).

Q3. La base de FRENET est constitué du vecteur $\vec{u}_t$ tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de la vitesse, et du vecteur $\vec{u}_n$ orthogonal à la trajectoire et orienté vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.



Q4. Dans le repère de FRENET, $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$.

Or ici la norme de la vitesse est constante donc $\vec{a} = \frac{v_0^2}{r} \vec{u}_n$.

Par application du PFD (seule la projection sur $\vec{u}_n$ est non nulle), on obtient :

$$m \vec{a} = \frac{v_0^2}{r} \vec{u}_n = +e \vec{v} \wedge \vec{B} = ev_0 B_0 \vec{u}_n$$

Les facteurs v_0 , B_0 , e et m sont constants, donc le rayon de courbure l'est aussi et vaut $r_L = \frac{v_0}{\omega_c}$ avec $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$. La trajectoire est donc **circulaire**.

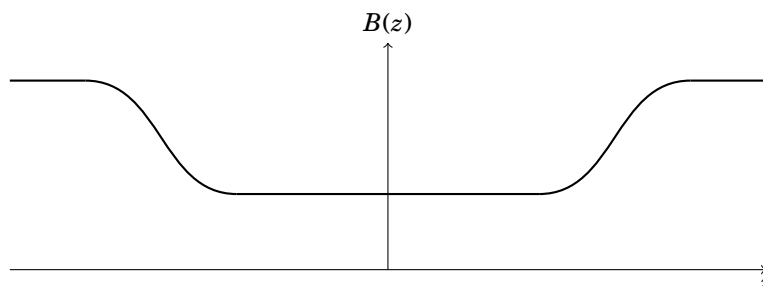
Q5. Si $\vec{B}$ est selon $\vec{u}_z$, alors la force magnétique est orthogonale à $\vec{u}_z$. Il n'y a aucune accélération selon $\vec{u}_z$ donc la composante v_z de la vitesse du cation selon $\vec{u}_z$ est constante. Si la vitesse initiale vaut v_0 et est selon $\vec{u}_z$ alors la force magnétique est constamment nulle et le mouvement est rectiligne. La particule part alors vers $z \rightarrow \infty$: le mouvement n'est pas confiné.

Q6. D'après ce qui précède, la particule chargée décrit une hélice suivant l'axe du champ magnétique. Dans cette configuration toroïdale, cet axe est en fait replié sur lui-même, formant une boucle : la particule est désormais confinée dans le dispositif.

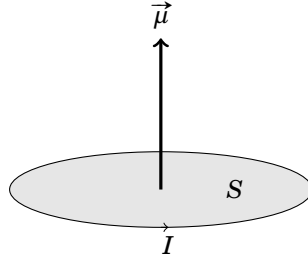
Q7. Application numérique : $r_L \approx 1$ mm. Ce rayon est très petit devant les dimensions du dispositif.

I.2 - Bouteille magnétique

Q8. Sur les bords de la bouteille magnétique, les lignes de champ sont plus serrées donc le champ est plus intense (la justification n'est pas demandée, mais ceci est dû à la conservation du flux magnétique car $\text{div} \vec{B} = 0$).



Q9. Par définition, le moment magnétique d'une boucle de courant plane est $\vec{\mu} = IS\vec{n}$ où I est le courant qui la parcourt, S la surface délimitée par la boucle, et $\vec{n}$ le vecteur normal à la surface, orienté positivement par rapport au courant.

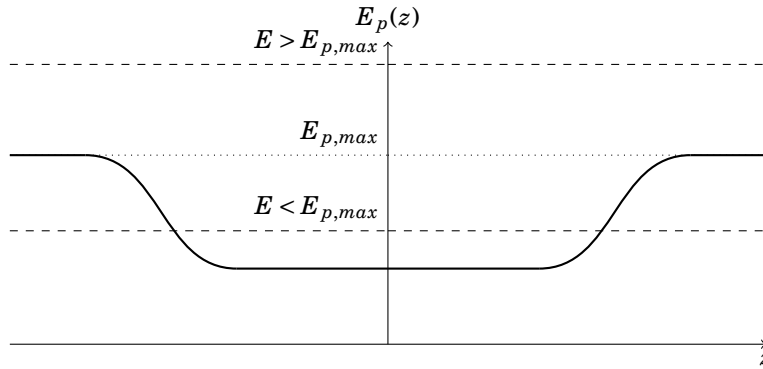


Q10. Calculons d'abord le courant. Comme le proton fait un tour par période, le courant vaut $I = \frac{e}{T} = e \frac{v_{\perp}}{2\pi r_L}$. Mais en reprenant le schéma de la **Q3**, on constate que le mouvement se fait dans le sens inverse du sens trigonométrique. Comme la surface vaut $S = \pi r_L^2$, on obtient :

$$\vec{\mu} = -\pi r_L^2 e \frac{v_{\perp}}{2\pi r_L} \vec{u}_z = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \vec{u}_z$$

Q11. $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2$. Ainsi, $E = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + E_p$ n'est autre que l'énergie cinétique totale de la particule, dont on a démontré qu'elle était constante. $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$ est son énergie cinétique pour son mouvement selon l'axe. Si on interprète ceci du point de vue du dipôle se déplaçant selon (Oz) , $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$ est son énergie cinétique et E son énergie mécanique. On s'est ramené à un problème à 1D selon (Oz) .

Q12. $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = +\mu B(z)$ car $\vec{\mu}$ est constant et orienté selon $-\vec{u}_z$. Le profil est donc proportionnel à celui dessiné plus haut.



Si $E < E_{p,max}$, comme $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 \geq 0$, seule la zone où $E > E_p$ est accessible : la particule est confinée, dans un état lié. Elle est réfléchiée à chaque extrémité. Sinon (si $E > E_{p,max}$) elle est dans un état libre.

Q13. Si $E > E_{p,max}$, c'est-à-dire si la particule est trop rapide, elle n'est plus confinée et peut s'échapper du dispositif.

Partie II - Diffusion du plasma

II.1 - Équation de diffusion ambipolaire

Q14. C'est la démonstration du cours, en faisant un bilan de particules (ici les électrons) entre t et $t + dt$, sur un volume élémentaire entre x et $x + dx$. On obtient pour les électrons :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial j_e}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Par analogie, pour les ions :

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Q15. La charge sur une plaque est toujours nulle, donc $Q_{plaque} = 0 \forall t$. Comme il n'y a pas de création, on a nécessairement, par un bilan, $\delta Q_{échangée} = 0$. Il n'y a pas de charge sortant, mais il y a 2 types de charges qui arrivent sur la plaque de surface S . Par conséquent :

$$\delta Q_{tot} = \delta Q_i + \delta Q_e = j_i(x=L, t) \cdot (+e) S dt + j_e(x=L, t) \cdot (-e) S dt = 0$$

On en déduit que $\boxed{j_i(x=L, t) = j_e(x=L, t)}$.

Q16. Partant des équations de la **Q14**, on fait (1) – (2) :

$$\frac{\partial(n_e - n_i)}{\partial t} + \frac{\partial(j_e - j_i)}{\partial x} = 0$$

Comme $n_e(x, t) = n_i(x, t)$, le premier terme est nul, donc $j_i(x, t) - j_e(x, t)$ ne dépend pas de x . Or il y a égalité entre j_i et j_e en $x = L$, donc égalité en tout point : $\boxed{\forall x, j_i(x, t) = j_e(x, t)}$.

Q17. Le terme $-\overrightarrow{\text{grad}n}$ correspond à la **loi de FICK** et le terme $\pm n\mu\vec{E}$ est l'effet de la combinaison de la force électrique et de la force de frottement (modèle de DRUDE), qui donne une vitesse proportionnelle au champ (sans frottement, la force constante $\vec{F}_e = q\vec{E}$ conduirait à une vitesse croissante).

Q18. Partant de $j_i = j_e$ et en remplaçant, il vient :

$$n\mu_i\vec{E} - D_i \frac{\partial n}{\partial x} \vec{u}_x = -n\mu_e\vec{E} - D_e \frac{\partial n}{\partial x} \vec{u}_x \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{D_i - D_e}{n(\mu_i + \mu_e)} \frac{\partial n}{\partial x} \vec{u}_x}$$

En remplaçant dans l'expression de $\vec{j}$:

$$j = n\mu_i E - D_i \frac{\partial n}{\partial x} = \left(n\mu_i \frac{D_i - D_e}{n(\mu_i + \mu_e)} - D_i \right) \frac{\partial n}{\partial x} = - \frac{D_e \mu_i + D_i \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\partial n}{\partial x}$$

On a donc le coefficient de diffusion ambipolaire $\boxed{D_a = \frac{D_i \mu_e + D_e \mu_i}{\mu_i + \mu_e}}$.

Q19. On injecte simplement $j = -D_a \frac{\partial n}{\partial x}$ dans l'équation (1) et on obtient bien l'équation de diffusion $\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$.

II.2 - Résolution de l'équation de diffusion ambipolaire

Q20. On injecte $n(x, t) = F(t)G(x)$ dans l'équation de diffusion :

$$F'(t)G(x) = D_a F(t)G''(x)$$

En divisant par $F(t)G(x)$ (en tout point où la fonction ne s'annule pas, quitte à raccorder par continuité), il vient

$$\frac{F'}{F} = D_a \frac{G''}{G}$$

Le membre de gauche ne dépend que de t , celui de droite que de x : on a donc finalement une constante K .

On résout la première partie : $F' - KF = 0 \Rightarrow F(t) = ae^{Kt}$. Pour que la solution ne diverge pas, il faut que K soit négatif, et par analyse dimensionnelle on peut poser $K = -\frac{1}{\tau}$. On a alors le système :

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} + \frac{F}{\tau} = 0 \\ \frac{d^2 G}{dx^2} + \frac{G}{D_a \tau} = 0 \end{cases}$$

Q21. On a déjà $F(t) = ae^{-t/\tau}$. On résout pour $G(x)$:

$$G''(x) + \frac{1}{D_a \tau} G(x) = 0 \Rightarrow G(x) = \beta \sin \frac{x}{\sqrt{D_a \tau}} + \gamma \cos \frac{x}{\sqrt{D_a \tau}}$$

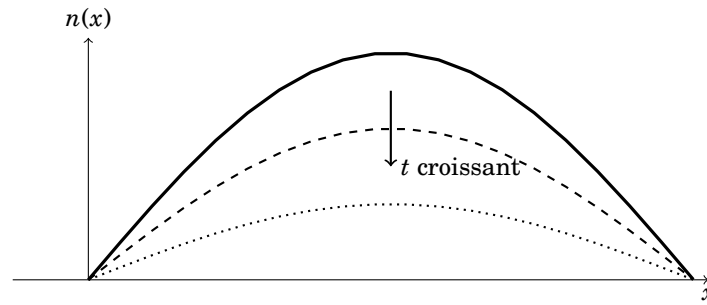
Finalement, on peut écrire la solution générale sous la forme :

$$\boxed{n(x, t) = \left[A \sin \frac{x}{\sqrt{D_a \tau}} + B \cos \frac{x}{\sqrt{D_a \tau}} \right] e^{-t/\tau}}$$

Q22. Avec les conditions aux limites : $n(0, t) = 0 \Rightarrow B = 0$, puis $n(L, t) = 0 \Rightarrow \sin \frac{L}{\sqrt{D_a \tau}} = 0 \Rightarrow \frac{L}{\sqrt{D_a \tau}} = p\pi$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

On en déduit $\boxed{\tau_p = \frac{1}{D_a} \left(\frac{D}{p\pi} \right)^2}$.

Q23. Le temps de décroissance de l'exponentielle τ_p est en $1/p^2$: plus p augmente, plus ce temps est court, donc le mode correspondant tend plus vite vers zéro. Le mode qui perdure le plus longtemps est donc le mode $p = 1$, avec $\boxed{n_1(x, t) = A e^{-\frac{\pi^2 D_a^2 t}{L^2}} \sin \frac{\pi x}{L}}$.



Au cours du temps, les ions et les électrons diffusent vers les plaques où ils se recombinaient : leur concentration diminue donc.

II.3 - Diffusion en présence de champ magnétique

Q24. Le coefficient de diffusion s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (on peut s'en convaincre avec l'équation de diffusion de la **Q19**). On en déduit que pour l'exprimer en fonction de v^* et de τ^* , la seule possibilité est $D = v^{*2} \tau^*$. Plus τ^* , plus le temps entre 2 chocs est important, plus la particule a le temps de diffuser loin avant que son mouvement ne soit interrompu.

Q25. On peut considérer que le plasma est **non magnétisé** si $D'_i \sim D_i$, ce qui est le cas lorsque $\omega_c \tau^* \ll 1$. Inversement, il est **magnétisé** si le terme correctif est non négligeable, donc si $\omega_c \tau^* \gtrsim 1$.

Q26. On suppose que v^* est constante. On peut donc écrire que :

- si la plasma est non magnétisé, $D'_i \sim D_i = v^{*2} \tau^* \propto \tau^*$
- si la plasma est magnétisé, $D'_i \sim \frac{D_i}{(\omega_c \tau^*)^2} \sim \frac{v^{*2}}{\omega_c^2 \tau^*} \propto \frac{1}{\tau^*}$

Par ailleurs, pour le plasma magnétisé, si B augmente, alors ω_c augmente donc D'_i diminue, s'éloignant ainsi d'autant plus de la valeur au repos.

Q27. Sur la figure (a), on distingue clairement des trajectoires hélicoïdales : la plasma est magnétisé. Sur la figure (b), la diffusion domine au contraire sur le mouvement hélicoïdal.

Q28. Plus τ^* est élevé, plus la particule reste longtemps sur la trajectoire hélicoïdale. Dans ce cas, sa diffusion (perpendiculaire à l'axe de l'hélice) est d'autant plus faible.

Q29. Plus le champ est intense et plus la diffusion, et donc les recombinaisons sur les plaques, se font lentement. Le plasma est plus stable, n diminue moins vite.

Partie III - Échauffement du plasma

III.1 - Température à atteindre pour initier la fusion

Q30. Pour que les réactions de fusion démarrent, il faut rapprocher 2 noyaux d'hydrogène à une distance de l'ordre de grandeur de leur rayon afin que les forces nucléaires puissent jouer leur rôle. Pour cela, il faut vaincre la répulsion électrostatique, dont l'énergie potentielle est de la forme $\mathcal{E}_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ avec $q_1 = q_2 = e$. Partant de l'infini, l'énergie à fournir pour arriver à la distance $R \sim 10^{-15} \text{ m}$ est donc $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$.

Si cette énergie est apportée sous forme thermique, il faut que $k_B T$ soit de cet ordre de grandeur, ce qui conduit à $T \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R k_B}$.

Application numérique : $T \sim 1,6 \cdot 10^{10} \text{ K}$

Q31. La température à atteindre est en fait plus faible que celle calculée : il n'est pas nécessaire de franchir complètement la barrière de potentiel car l'effet tunnel intervient. Rappelons qu'à courte distance ($r \approx 10^{-15} \text{ m}$), les interactions nucléaires sont attractives entre les nucléons, il y a donc un puits de potentiel à cette échelle : si l'on franchit la barrière, les nucléons peuvent fusionner. On peut alors y voir le phénomène inverse de celui proposé par GAMOV pour décrire la radioactivité alpha : l'énergie thermique nécessaire ne serait plus celle permettant d'atteindre le haut de la barrière de potentiel, mais simplement un point où cette barrière est franchissable par effet tunnel. Est-ce suffisant pour abaisser la température nécessaire d'un facteur 100??

III.2 - Chauffage ohmique par induction

Q32. On calcule le flux du champ créé par la bobine à travers la spire : $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Or le champ est uniforme pour $r < a_1$ et nul au-delà, donc $\Phi = \pi a_1^2 \beta i_1$.

Par identification avec la définition de M ($\Phi = M i_1$), on obtient $M = \pi a_1^2 \beta$

Application numérique : $\beta = \frac{B}{i_1} = \frac{13}{46 \cdot 10^3} \text{ USI}$ donc $M \approx 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ H}$.

Q33. La loi des mailles dans le circuit 2 associée à la loi d'OHM et à la loi de FARADAY donne $e = R_2 i_2 = -\frac{d\Phi_{tot}}{dt}$ avec $\Phi_{tot} = L_2 i_2 + M i_1$. On a donc :

$$R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} = \frac{I_0}{\tau_1}$$

avec $\tau_1 = t_1 \frac{L_2}{M}$ et $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$.

Q34. La solution est de la forme $i_2(t) = Ae^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0$. Comme $i_2(0) = 0$, on a $i_2(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0 (1 - e^{-t/\tau_2})$.

En supposant $t \ll \tau_2$, au premier ordre en t/τ_2 , on trouve $i_2(t) \approx \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0 \frac{t}{\tau_2} = I_0 \frac{t}{\tau_1}$.

Q35. La puissance instantanée reçue par R_2 s'écrit $\mathcal{P}_2 = R_2 i_2^2$ donc en intégrant :

$$\mathcal{E}_2 = \int_0^{t_1} R_2 \left(I_0 \frac{t}{\tau_1} \right)^2 dt = R_2 \left(\frac{I_0}{\tau_1} \right)^2 \frac{t_1^3}{3}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{R_2 M^2 I_0^2}{3 L_2^2} t_1$$

Cette énergie est reçue par le plasma et augmente sa température.

Q36. Si la résistivité diminue, la résistance R_2 diminue donc le chauffage est moindre. De plus, R_2 évolue alors au cours du temps, au fur et à mesure que la température augmente.

III.3 - Échauffement par ondes électromagnétiques

Q37. Équations de MAXWELL :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ MAXWELL-GAUSS}$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ MAXWELL-FARADAY}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \text{ MAXWELL-FLUX}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ MAXWELL-AMPÈRE}$$

Q38. On calcule la divergence de $\vec{E}$. Comme l'onde est transverse, $E_z = 0$ et comme l'onde est plane, E_x et E_y ne dépendent que de z . Ainsi, $\text{div} \vec{E} = 0$ donc $\rho = 0$.

Q39. On applique la formule du double rotationnel : $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$
D'après ce qui précède, $\text{div} \vec{E} = 0$ puis on utilise successivement MAXWELL-FARADAY puis MAXWELL-AMPÈRE pour obtenir

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Q40. La masse des ions du plasma est beaucoup plus importante que celle des électrons (au moins d'un facteur 1000), donc à excitation (force électrique) égale, leur vitesse sera nettement plus faible, donc leur contribution à $\vec{j}$ sera négligeable (à charge et densité équivalentes).

Q41. On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron, soumis à 2 forces : la force électrique et la force magnétique :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On projette et on obtient le système suivant (en complexes) :

$$\begin{cases} m_e i\omega \underline{v}_x = -eE_0 - e v_y B_0 \\ m_e i\omega \underline{v}_y = +ieE_0 + e v_x B_0 \end{cases}$$

En divisant par $m_e i\omega$, on obtient bien

$$\begin{cases} \underline{v}_x = \frac{i\alpha}{\omega} + \frac{i\omega_c}{\omega} \underline{v}_y \\ \underline{v}_y = \frac{\alpha}{\omega} - \frac{i\omega_c}{\omega} \underline{v}_x \end{cases}$$

avec $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$ et $\alpha = \frac{eE_0}{m}$.

Q42. Pour $\omega = \omega_c$, la norme de la vitesse devient infiniment grande : c'est la définition d'une résonance. On peut imaginer qu'il se produit alors de nombreuses collisions qui échauffent le plasma (collisions qui ont été négligées jusqu'à présent dans le modèle, ce qui conduit à cette divergence).

Q43. La densité volumique de courant $\vec{j}$ est le produit de la densité volumique de charge libre, qui vaut ici $n_0(-e)$, par la vitesse de ces charges, donc $\vec{v}$, soit $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$.

$$\vec{j} = -n_0 e i \frac{e}{m_e(\omega - \omega_c)} \vec{E}$$

On remplace alors dans l'équation de propagation et on en déduit la relation de dispersion :

$$(-ik)^2 - \frac{1}{c^2}(i\omega)^2 = \mu_0 i \omega \frac{-in_0 e^2}{m_e(\omega - \omega_c)} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 \omega n_0 e^2}{m_e(\omega - \omega_c)}$$

En posant $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}}$, on trouve bien $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \right)$.

Q44. Application numérique : $\omega_p \approx 5,6 \cdot 10^{11}$ Hz

Q45. Pour que l'onde puisse se propager dans le plasma, il faut que k soit réel et non imaginaire pur, donc que $k^2 > 0$ soit $\frac{\omega^2}{k^2} > 0$. C'est donc possible pour $\omega < \omega_c$ ou $\omega > \omega_g$.

Q46. Par définition, $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ (lorsque k est réel). Pour $\omega \rightarrow \omega_c$, on a $v_\phi \rightarrow 0$: l'onde ne se propage pas. Interprétation???

***** FIN DU CORRIGE *****