

①

Éléments de corrigé rédigés par
 Matthieu Rigaut. matthieu.rigaut@gmail.com
 pour vos remarques et signalements d'erreurs

E3A PC 2023

Physique - Chimie
partie physique

Partie I - Hydrostatique

[Q1] Voir cours $\vec{F}_v = -\vec{\text{grad}} P$

[Q2] $\vec{f}_{v, \text{pes}} = \rho_0 \vec{g}$

La relation fondamentale de la statique
 des fluides est donc

$$(\vec{F}_v + \vec{f}_{v, \text{pes}}) \times d\vec{v} = \vec{0} \rightsquigarrow \underline{\vec{\text{grad}} P = \rho_0 \vec{g}}$$

Q3 (Δ sens de $\vec{e}_z$)

(2)

En projection sur $\vec{e}_z$:

$$\frac{dP}{dz}(z) = \rho_0 g \quad \text{et } \rho_0 = \text{cst} \rightarrow P(z) = \text{cst} + \rho_0 g z$$

Par continuité de la pression en $z=0$

$$\underline{P(z) = P_0 + \rho_0 g z /}$$

Q4 La poussée d'Archimède est égale à l'opposé du poide du volume d'eau déplacé par le sous-marin. Donc ici :

$$\underline{\vec{\Pi}_A = -\rho_0 \times \pi R^2 \times L \times \vec{g} /}$$

Cette force n'est autre que la résultante des forces pressantes.

Rq : étant donné que l'eau est incompressible, peu importe que l'axe du sous marin soit horizontal ou incliné. La poussée d'Archimède restera la même.

Q5 Les ballasts permettent de faire varier le poids $\vec{P}$ du sous marin.

Si, en 1^{ère} approximation, $\overline{\Pi}_A = \overrightarrow{cst}$, la variation de $\vec{P}$ permet de faire monter ou descendre le sous-marin.

Rq : l'expérience du ludion montre que la plongée par un véhicule est instable. Pour rester à profondeur constante, des mécanismes de rétroaction sont indispensables.

La coque extérieure est mince car :

- ↳ soit le sous-marin est en surface et la pression qui s'exerce est faible
- ↳ soit le sous marin est en plongée et une forte pression s'exerce de chaque côté des parois, pour une résultante très faible.

La coque intérieure est épaisse car elle doit résister à une différence de pression entre

$P_{\text{équipage}} \approx 1 \text{ bar}$ et $P_{\text{océan}} \approx 30 \text{ bar}$.

$$100 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-2} \equiv 9,8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} = 9,8 \cdot 10^9 \text{ Pa} = 9,8 \cdot 10^4 \text{ bar}$$

$$\text{Or } P(300\text{m}) \approx 31 \text{ bar} \ll 9,8 \cdot 10^4 \text{ bar}$$

Le sous-marin ne risque pas d'imploser, et de loin.

(4)

Rq Je soupçonne une erreur d'énoncé

car une telle pression serait atteinte à une profondeur de 100 km ! Sachant que la profondeur maximale des océans est de 11 km. Certes, il s'agit d'un sous-marin militaire qui se doit d'être solide. Mais quand même. Recherche faite sur internet, l'acier semble effectivement résister à des contraintes de plusieurs 100aine MPa. La faiblesse viendrait alors de la jonction entre les pièces métalliques

Partie II - Cavitation

[Q6] L'uniformité du champ de vitesse sur une section permet d'écrire le débit volumique sous la forme $D_v = v \times S$
 Le caractère incompressible de l'écoulement implique l'uniformité du débit volumique le long de la tuyère, soit

$$\underline{v_1 S_1 = v_2 S_2 /}$$

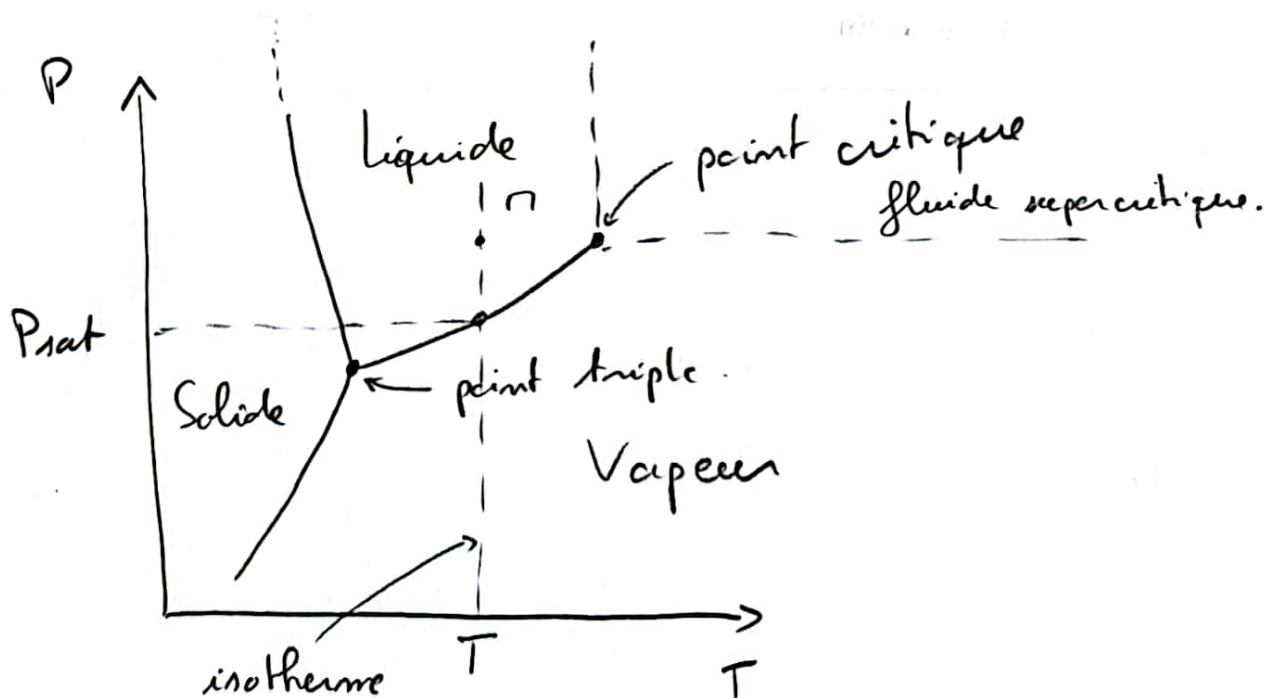
(5)

[Q7] Pour appliquer la relation de Bernoulli, il faut que l'écoulement soit PSICH : Parfait, Stationnaire, Incompressible et Homogène, ce qui est le cas ici. Nous avons donc, le long de la ligne de courant $E \rightarrow C$

$$P(E) + \rho_0 \frac{v_1^2}{2} + \cancel{\rho_0 g z_E} = P(C) + \rho_0 \frac{v_2^2}{2} + \cancel{\rho_0 g z_C}$$

$$P(C) - P(E) = \frac{\rho_0}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad \text{et} \quad v_1 S_1 = v_2 S_2$$

$$\leadsto P(C) - P(E) = \frac{\rho_0}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \right) \quad / \quad (\text{valeur négative})$$

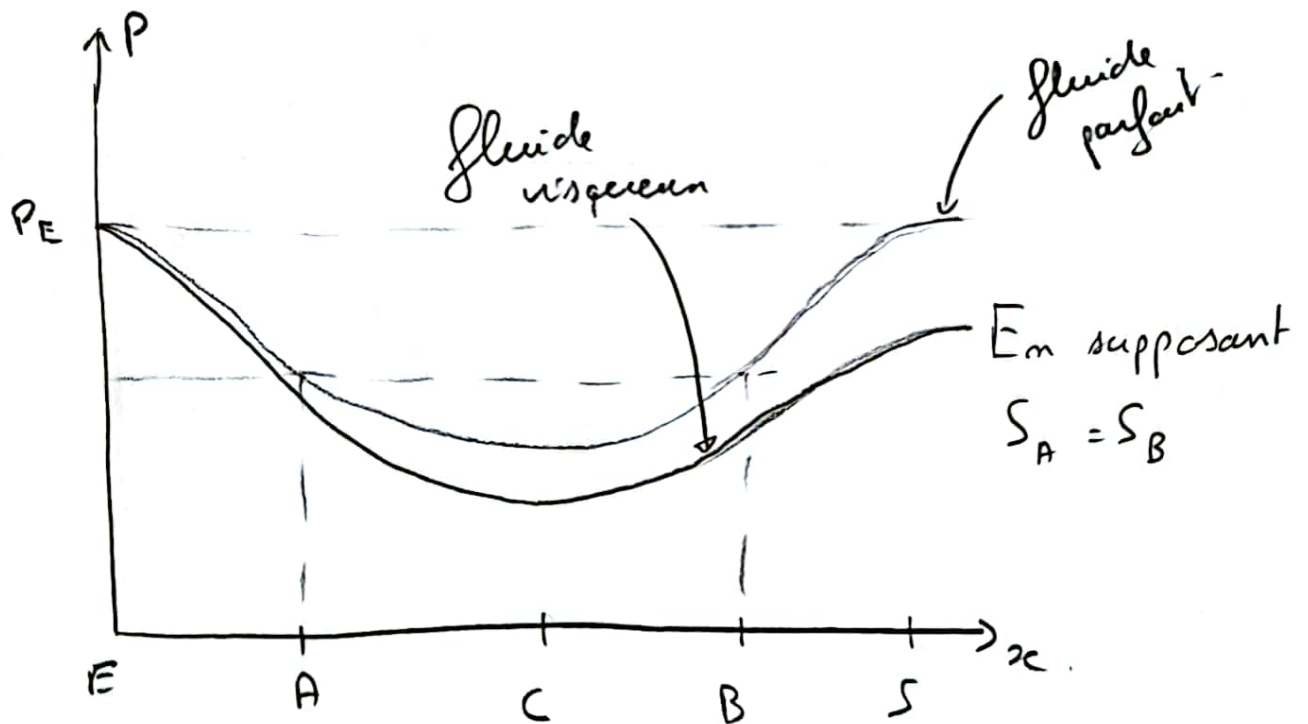


(6)

À partir du point A, une diminution isotherme de la pression P peut engendrer des bulles de vapeur dès lors que P atteint P_{sat} . Ces bulles apparaissent quand la pression diminue donc dans la zone hachurée.



Q8



Le phénomène s'appelle la perte de charge.

Rq Je ne vois pas vraiment de meilleure
 réponse que "perte de charge". D'un
 autre côté, ce n'est pas au programme des
 PC.

Q9 La pression de vapeur saturante augmente
 avec la température T . Donc il est plus
 facile de l'atteindre par diminution de pression.
 Ainsi la cavitation est plus fréquente en eau
 chaude et les sous-marins moins discrets.

De même, avec une diminution de pression iden-
 tique "en haut" et "en bas" de l'hélice, la cavi-
 tation sera plus aisée "en haut" où la pression
 est (un peu) plus faible qu'en bas.

Un sous-marin est donc d'autant plus
 discret qu'il va lentement (hélices lentes,
 peu de variation de pression) et en profondeur.

Q10 l'équation locale de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Comme l'eau est incompressible, $\rho(r, t) = \rho_0$

$$\text{soit } 0 + \rho_0 \times \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \rightsquigarrow \underline{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$$

Au niveau de la paroi de la bulle, nous avons $v(R, t) = \frac{dR}{dt}(t)$.

Avec le formulaire

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \rightsquigarrow \frac{1}{r^2} \times \frac{\partial (r^2 \times v(r))}{\partial r} = 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v(r, t)) = 0 \rightsquigarrow r^2 \times v(r, t) = f(t)$$

$$\rightsquigarrow v(r, t) = \frac{f(t)}{r^2}.$$

$$\text{On pose } r = R \rightsquigarrow v(R, t) = \frac{dR}{dt}(t)$$

$$\rightsquigarrow v(R, t) = \frac{f(t)}{R^2} \rightsquigarrow f(t) = R^2 \times \frac{dR}{dt}(t).$$

Finalement, nous obtenons le résultat

$$\text{attendu } v(r, t) = - \frac{A(t)}{r^2} \text{ avec } A(t) = - R^2(t) \times \frac{dR}{dt}(t)$$

(9)

Q11. Équation d'Euler:

$$\rho_0 \times \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = - \nabla P + \rho_0 \vec{g}$$

En négligeant la pesanteur et avec le formulaire, le tout en projection sur $\vec{e}_n$.

$$\rho_0 \times \frac{dv_n}{dt}(r,t) + v_n(r,t) \times \frac{dv_n}{dn}(r,t) = - \frac{\partial P}{\partial n}(r,t)$$

En remplaçant $v_n(r,t)$ par l'expression obtenue Q10

$$\rho_0 \times \left(- \frac{\dot{A}(t)}{n^2} - \frac{A(t)}{n^2} \times \left(- \frac{2A(t)}{n^3} \right) \right) = - \frac{\partial P}{\partial n}(r,t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial n}(r,t) = \rho_0 \times \left(\frac{\dot{A}(t)}{n^2} - \frac{2A^2(t)}{n^5} \right)$$

$$\text{Q12} \quad \frac{dR}{dt} = - \sqrt{\frac{2}{3\rho_0} (p_\infty - p_{sat}) \left(\frac{R_0^3}{R(t)^3} - 1 \right)}$$

$$\Rightarrow dt = - \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3\rho_0} (p_\infty - p_{sat})}} \times \frac{dR}{\sqrt{\frac{R_0^3}{R(t)^3} - 1}}$$

$$\tau = \int_{R_0 \leftarrow \text{d\u00e9but}}^0 \leftarrow \text{fin} dt.$$

$$\leadsto \tau = + \sqrt{\frac{3 \rho_0}{2(p_\infty - p_{sat})}} \times \int_0^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\frac{R_0^3}{R^3} - 1}}$$

$$= + \sqrt{\frac{3 \rho_0}{2(p_\infty - p_{sat})}} \times \int_0^{R_0} \sqrt{\frac{\frac{R^3}{R_0^3}}{1 - \frac{R^3}{R_0^3}}} \times dR$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{R}{R_0} \\ du &= \frac{dR}{R_0} \end{aligned}$$

$$= + \sqrt{\frac{3 \rho_0}{2(p_\infty - p_{sat})}} \times \int_0^1 \sqrt{\frac{u^3}{1 - u^3}} \times R_0 du.$$

$$\leadsto \tau = \sqrt{\frac{3 \rho_0}{2(p_\infty - p_{sat})}} \times R_0 \times J$$

num\u00e9riquement :

$$\tau = \sqrt{\frac{3 \times 1,0 \cdot 10^3}{2 \times (1,0 \cdot 10^5 - 2,4 \cdot 10^3)}} \times 2 \cdot 10^{-3} \times 0,747$$

$$\tau = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

La durée d'évolution d'une bulle dans une boisson pétillante n'a rien à voir avec l'implosion d'une bulle de cavitation.

Dans les boissons pétillantes, les bulles grossissent et sont constituées de CO_2 .

En revanche, avec $\tau \approx 10^{-4} \text{ s}$, le bruit engendré (variation de pression) est de fréquence $\approx \text{kHz}$, ce qui est dans la plage audible. C'est ce que nous pouvons entendre quand nous mettons de l'eau à chauffer à la bouilloire par exemple.

Partie III - Ondes électromagnétiques

Q13. $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ Maxwell Gauss

$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Maxwell Faraday

$\text{div } \vec{B} = 0$ Maxwell Thomson (ou Maxwell flux)

$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Maxwell Ampère

$\text{div}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A})$ conduit à

$$0 = \text{div} \vec{j} + \epsilon_r \text{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

} Schwarz + N.G

$$\epsilon_r \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) + \text{div} \vec{j} = 0$$

$$\leadsto \underline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0}$$

Avec $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ et à nouveau N.G.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon} \rho = 0 \leadsto \underline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau_R} \rho = 0 \text{ avec } \tau_R = \frac{\epsilon}{\gamma}}$$

Numériquement $\tau_R = \frac{81 \times 8,85 \cdot 10^{-12}}{4} = 1,79 \cdot 10^{-10} \text{ s}$

Au bout de $5\tau_R$, nous pouvons considérer $\rho = 0$.

Q14 Avec $\rho = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) \\ &= \vec{0} + \vec{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \stackrel{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B} \quad \left. \begin{array}{l} \text{N.G. + N.F} \\ \text{N.A} \end{array} \right\} \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{j} + \mu \cdot \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\underline{\Delta \vec{E} = \mu \cdot \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \cdot \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

Q15 Avec la forme proposée pour le champ $\vec{E}$, nous obtenons

$$(-j\vec{k})^2 = \mu_0 \gamma j\omega - \mu_0 \epsilon \omega^2$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{k}^2} = \mu_0 \epsilon \omega^2 - \mu_0 \gamma j\omega$$

Avec $\gamma = 0$ et $\epsilon = \epsilon_0$, cela donne

$$\underline{\vec{k}^2} = \mu_0 \epsilon \omega^2 \text{ et comme } \mu_0 \epsilon = \frac{1}{c^2}, \text{ il}$$

s'agit bien de la relation de dispersion dans le vide

Q16 ⚠ Notation maladroite : $\underline{k} = k_r - j k_i$.

(Pour moi l'indice 'r' fait plutôt référence à une onde 'réfléchie' et l'indice 'i' fait référence à l'onde 'incidente')

Utilisons la relation de structure de l'OPPH :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}$$

Avec $\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 e^{j(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})}$ $\underline{\vec{u}}_x$
 et $\underline{k} = k \underline{\vec{u}}_z$, cela donne

$$\underline{\vec{B}} = \frac{k \underline{E}_0}{\omega} e^{j(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})} \underline{\vec{u}}_y$$

Avec $\underline{k} \cdot \underline{r} = k_z z - j k_i z$, nous avons

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 e^{-k_i z} \times e^{j(\omega t - k_z z)} \underline{\vec{u}}_x \\ \underline{\vec{B}} = \frac{k \underline{E}_0}{\omega} e^{-k_i z} \times e^{j(\omega t - k_z z)} \underline{\vec{u}}_y \end{cases}$$

Ainsi avec le formulaire

$$\langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{|\underline{E}_0|^2 \times k}{\omega} \times e^{-2k_i z} \underline{\vec{u}}_z \right)$$

$$\langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega} \times |\underline{E}_0|^2 \times e^{-2k_i z} \underline{\vec{u}}_z$$

[Q17] Par identification, nous

trouvons $\alpha = 2k$:

$$A_{dB} = 10 \times \log(e^{+2kz})$$

$$= \frac{10}{\ln 10} \times 2kz \quad \leadsto \quad \frac{A_{dB}}{z} = \frac{20}{\ln 10} \times k$$

donc $\frac{A_{dB}}{z}$ est bien proportionnel à k

[Q18] Comme $\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon}$, alors $\epsilon \omega^2 \ll \gamma \omega$

et ainsi la relation de dispersion se simplifie

en $\underline{k}^2 = -\mu_0 \gamma j \omega = \mu_0 \gamma \omega \times e^{-j\frac{\pi}{2}}$

d'où $\underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega \times e^{-j\frac{\pi}{4}}} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} \times (1 - j)$

Ce qui est de la forme recherchée avec

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Numériquement

423

$$\delta(3 \text{ kHz}) = \sqrt{\frac{2}{4 \times \pi \cdot 10^{-7} \times 4 \times 2\pi \times 3 \cdot 10^3}} = 4,6 \text{ m}$$

$$\delta(30 \text{ kHz}) = \frac{\delta(3 \text{ kHz})}{\sqrt{10}} = 1,5 \text{ m}.$$

Commentaire avec la figure ?? Je pense que c'est pour commenter la longueur de l'antenne, mais que dire ? Au bout de $5\lambda = 20 \text{ m}$, l'onde n'existe pour ainsi dire plus. Donc le sous marin ne peut communiquer qu'à quelques dizaines de mètres autour de lui quand il est en plongée.

