

# CCINP Physique PC 2023

## La qualité de l'air dans l'habitat

### *Proposition de corrigé*

Ce corrigé à été rédigé par Marie THOREY et David LASNE. N'hésitez pas à nous signaler par mail (thoreymarie@aol.com ou david.lasne@ac-normandie.fr) toute coquille ou erreur. Vous pouvez le distribuer à vos élèves.

Par ailleurs un certain nombre d'imperfections ou d'ambiguïtés repérées dans l'énoncé de cette épreuve sont notées en rouge au fur et à mesure, principalement à destination des enseignants.

## Partie I - Le renouvellement de l'air dans l'habitat

### I.1 - Bilan énergétique pour un fluide en écoulement stationnaire

**Q1.** Par définition de  $\mathcal{S}^*$ , on a  $m(\mathcal{S}^*, t) = m(\mathcal{S}, t) + \delta m_1$  et  $m(\mathcal{S}^*, t + dt) = m(\mathcal{S}, t + dt) + \delta m_2$ . Comme  $\mathcal{S}$  est immobile et que l'on est en régime stationnaire,  $m(\mathcal{S}, t) = m(\mathcal{S}, t + dt)$ , donc par conservation de la masse de  $\mathcal{S}^*$  (système fermé) :  $\delta m_1 = \delta m_2$ .

On en déduit directement par définition du débit que celui-ci est identique à l'entrée et à la sortie :  $D_m = \frac{\delta m_1}{dt} = \frac{\delta m_2}{dt}$ .

**Q2.** Deux méthodes possibles : soit on exprime les forces de pression puis on calcule leur travail, en utilisant le déplacement élémentaire que l'on exprime en fonction du débit, soit on passe par la formule couramment utilisée en thermo :  $\delta W = -P dV$ . Ici, à l'entrée,  $dV_1 = -\frac{\delta m_1}{\rho_1} < 0$  car il s'agit d'une compression, et donc  $\delta W_1 = +p_1 \frac{\delta m_1}{\rho_1}$ . De même, à la sortie (détente)  $\delta W_2 = -p_2 \frac{\delta m_2}{\rho_2}$ . Comme  $\delta m_1 = \delta m_2$ , on obtient en divisant par la masse le travail massique total :

$$w_p = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}$$

Notons que sur les parois latérales, le travail est nul car les parois sont supposées indéformables.

**Q3.** On exprime  $dU$  (qui devrait plutôt être notée  $dU^*$  pour éviter les confusions car il s'agit bien de l'énergie du système fermé  $\mathcal{S}^*$ ). Comme l'énergie contenue dans  $\mathcal{S}$  est constante (régime stationnaire), seul l'écart entre les énergies de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  demeure :  $dU = \delta U_2 - \delta U_1$ .

Or  $\delta U_i = \delta m_i u_i = D_m dt u_i$  pour  $i = 1, 2$  donc il vient :

$$dU = D_m (u_2 - u_1) dt$$

On a de même  $dE_c = D_m (e_{c,2} - e_{c,1}) dt$  et  $dE_p = D_m (e_{p,2} - e_{p,1}) dt$  avec les énergies massiques à chaque fois.

**Q4.** On applique le premier principe au système fermé  $\mathcal{S}^*$  entre  $t$  et  $t + dt$  :  $dU + dE_p + dE_c = \delta W + \delta Q$ .

Or  $\delta W = \delta W_p + \delta W_u = w_p D_m dt + \mathcal{P}_u dt$  et  $\delta Q = \mathcal{P}_{th} dt$ . On obtient alors :

$$D_m dt [(u_2 + e_{p,2} + e_{c,2}) - (u_1 + e_{p,1} + e_{c,1})] = \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) D_m dt + \mathcal{P}_u dt + \mathcal{P}_{th} dt$$

On simplifie par  $dt$  et on remarque que  $u + \frac{p}{\rho} = u + p.v = h$  l'enthalpie massique, donc on arrive au résultat du cours :

$$D_m [(h_2 + e_{p,2} + e_{c,2}) - (h_1 + e_{p,1} + e_{c,1})] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

### I.2 - Étude d'une ventilation mécanique contrôlée à double flux

**Q5.** D'après le cours, la résistance thermique est le rapport entre la différence de température et le flux thermique (ou puissance thermique). On a donc  $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\mathcal{P}_{th}}$ .

Application numérique :  $R_{th} = 4.10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$

**Q6.** Par définition,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ , et on a la relation de MAYER  $C_p - C_v = nR$ . En résolvant ce système de 2 équations à 2 inconnues,

on tire  $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$  et  $C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}$ . On passe à la grandeur massique en utilisant  $m = nM$ , ce qui donne  $c_p = \frac{R}{M} \frac{\gamma}{\gamma-1}$ .

Application numérique :  $c_p = 1,0 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$

**Q7.** On note  $\mathcal{P}$  la puissance thermique cédée par le fluide sortant au fluide entrant. On applique le premier principe en écoulement stationnaire aux 2 écoulements, sachant qu'il n'y a pas de pièce mobile donc le travail utile est nul.

$$\begin{cases} D_m(h'_{ext} - h_{ext}) = \mathcal{P} \\ D_m(h'_{int} - h_{int}) = -\mathcal{P} \end{cases}$$

On a donc  $h'_{ext} - h_{ext} = h_{int} - h'_{int}$ . Comme pour un gaz parfait l'enthalpie ne dépend que de la température ( $\Delta h = c_P \Delta T$ ), on a bien  $T'_{ext} - T_{ext} = T_{int} - T'_{int}$ .

Application numérique :  $T'_{int} = 5^\circ\text{C}$

**Q8.** Pour passer une masse  $m$  de  $T'_{ext}$  à  $T_{int}$ , il faut une énergie  $mc_P(T_{int} - T'_{ext})$  donc en se ramenant à l'unité de temps, la puissance nécessaire est  $\mathcal{P}_{th,a} = D_m c_P (T_{int} - T'_{ext})$

Application numérique :  $\mathcal{P}_{th,a} = 208 \text{ W}$

**Q9.** La puissance du chauffage doit compenser les pertes à travers les parois et réchauffer l'air entrant, donc  $\mathcal{P}_c = \mathcal{P}_{th,a} + \mathcal{P}_{th,p}$ .

Application numérique :  $\mathcal{P}_c = 5208 \text{ W}$

**Q10.** Avec une VMC simple flux, il faut réchauffer l'air extérieur de  $T_{ext}$  à  $T_{int}$ , la puissance nécessaire est alors  $\mathcal{P}'_{th,a} = D_m c_P (T_{int} - T_{ext})$ .

Application numérique :  $\mathcal{P}'_{th,a} = 833 \text{ W}$  et donc  $\mathcal{P}'_c = 5833 \text{ W}$

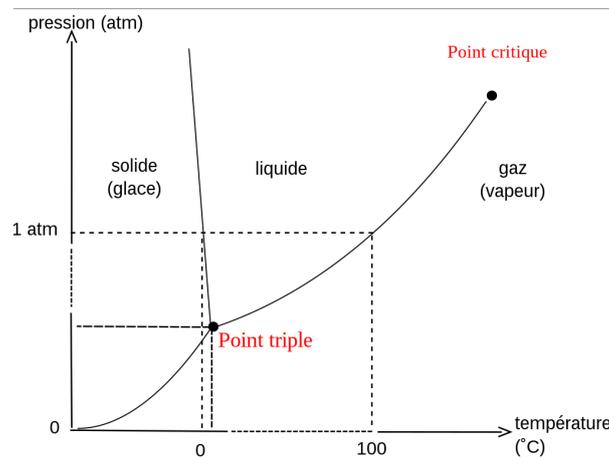
Le gain est donc de  $\frac{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}'_c}{\mathcal{P}'_c} \approx 11\%$ .

Si l'échange était parfait, on aurait  $\mathcal{P}_{c,parfait} = 5000 \text{ W}$  simplement, ce qui donne un gain de 14%.

## Partie II - L'humidité de l'air dans l'habitat

### II.1 - L'air humide

**Q11.** D'après le cours, en n'oubliant pas que l'eau est un cas particulier (pente négative; source : Wikipedia) :



Le **point triple** est le point de coexistence des 3 phases en équilibre. Le **point critique** est le point au-delà duquel la distinction entre liquide et gaz n'est plus possible.

**Q12.** D'après la loi de DALTON,  $p_0 = p_{as} + p_e$ .

Application numérique :  $p_e = \phi p_{e,sat} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ Pa}$  donc  $p_{as} = 98,7 \cdot 10^3 \text{ Pa}$  ( $99 \cdot 10^3 \text{ Pa}$  si 2 chiffres significatifs)

Avec la loi des GP :  $m_e = n_e M_e = M_e \frac{p_e V}{RT}$  et  $m_{as} = M_a \frac{p_{as} V}{RT}$ .

Application numérique :  $m_e = 0,47 \text{ kg}$  et  $m_{as} = 59 \text{ kg}$  donc  $\phi = 7,9 \cdot 10^{-3}$ .

**Q13.** On veut  $p_e = p_{e,sat} = 2,3 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ . Par le même calcul que précédemment, on en déduit qu'il faut une masse d'eau  $m'_e = 0,85 \text{ kg}$ . Il faut donc évaporer  $0,38 \text{ kg}$  soit  $0,38 \text{ L}$  d'eau.

**Q14.** Soit  $M(t) = C(t) V$  la masse d'eau présente dans la pièce. Entre  $t$  et  $t + dt$ , il entre un volume  $D_v dt$  d'air à la concentration en eau  $C_{ext}$  donc une masse d'eau  $C_{ext} D_v dt$  et on évacue une masse d'eau  $C(t) D_v dt$ . On crée de plus une masse de vapeur d'eau  $S dt$ . Le bilan donne donc :

$$M(t + dt) - M(t) = \delta M(\text{entrant}) - \delta M(\text{sortant}) + \delta M(\text{créé})$$

$$V(C(t + dt) - C(t)) = C_{ext} D_v dt - C(t) D_v dt + S dt$$

$$\frac{dC}{dt} + \frac{D_v}{V} C(t) = \frac{D_v}{V} C_{ext} + \frac{S}{V}$$

On cherche une solution stationnaire  $C(t) = C_{lim}$  donc  $\frac{dC}{dt} = 0$ , ce qui donne  $D_{v,m} = \frac{S}{C_{lim} - C_{ext}}$ .

**Q15.** Application numérique :  $D_{v,m} = 100 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ .

On demande de comparer ce débit volumique à un débit massique (**Erreur d'énoncé?**) donc il faut la masse volumique de l'air. Soit on utilise l'ordre de grandeur typique pour un gaz ( $\rho_a \sim 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ), soit on connaît le cas de l'air ( $\rho_a \approx 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ), soit on calcule  $\rho_a$  en supposant que l'air est un GP ( $\rho_a = \frac{M_a p_a}{RT} \approx 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ). Dans tous les cas, on a un débit massique de l'ordre de  $100 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$  donc **le débit choisi permet bien de maintenir un taux d'humidité satisfaisant.**

## II.2 - Principe d'un capteur d'humidité capacitif

**Q16.** Le problème est invariant par rotation d'angle  $\theta$  donc le champ l'est également. De plus, le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie des charges donc du champ électrique, donc  $\vec{E}$  est contenu dans ce plan, et donc  $E_\theta = 0$ . On a donc

$$\vec{E}(M, t) = E_r(r, z, t) \vec{u}_r + E_z(r, z, t) \vec{u}_z$$

**Q17.**  $\text{rot } \vec{E} = \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = \vec{0}$ .

En ordre de grandeur, en faisant attention aux 2 dimensions d'espace du problème, on a  $\frac{\partial E_r}{\partial z} \sim \frac{|E_r|}{d}$  et  $\frac{\partial E_z}{\partial r} \sim \frac{|E_z|}{a}$ . On a donc avec le rotationnel nul  $\frac{|E_r|}{d} \sim \frac{|E_z|}{a}$  donc

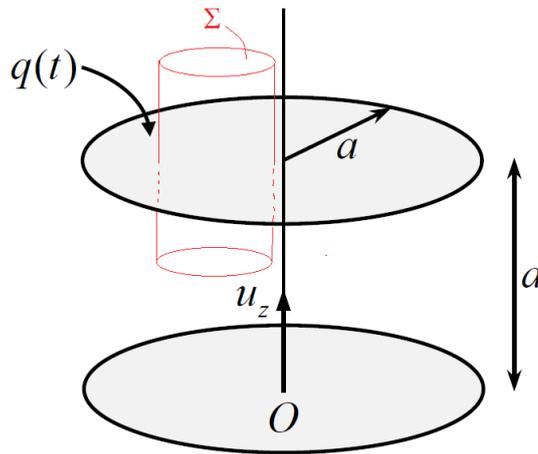
$$\left| \frac{E_r}{E_z} \right| \sim \frac{d}{a} \ll 1$$

Il ne reste donc plus que  $\vec{E}(M, t) = E_z(r, z, t) \vec{u}_z$ .

De plus  $\text{div } \vec{E} = 0$  car il n'y a pas de charges entre les armatures (équation de MAXWELL-GAUSS), donc  $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$  et finalement

$$\vec{E}(M, t) = E_z(r, t) \vec{u}_z$$

**Q18.** Le calcul est plus simple que la méthode classique car on suppose que le champ est uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur. On prend donc comme surface de GAUSS un cylindre droit de forme et de hauteur quelconque, du moment que la face du haut est à une altitude supérieure à  $d$  (donc au dessus de la plaque du haut) et la face du bas entre les armatures, donc à une position où le champ vaut  $\vec{E}_0(t) \vec{u}_z$ . On note  $\Sigma$  la surface de la base.



On oriente cette surface vers l'extérieur :  $d\vec{S}_{haut} = dS \vec{u}_z$ ,  $d\vec{S}_{bas} = -dS \vec{u}_z$  et  $d\vec{S}_{lat} \perp \vec{u}_z$ .

Le flux du champ électrique à travers cette surface vaut donc :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{haut} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{haut} + \iint_{bas} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{bas} + \iint_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat} = -E_0(t) \Sigma$$

La charge contenue à l'intérieur de la surface de GAUSS est, par proportionnalité (charge répartie uniformément sur la plaque)

$$Q_{int} = \frac{\Sigma}{\pi a^2} q(t).$$

D'après le théorème de GAUSS,  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  donc on obtient :

$$\vec{E}_0(t) = -\frac{q(t)}{\pi a^2 \epsilon_0} \vec{u}_z$$

**Q19. Question mal comprise, pas de réponse convaincante.** L'énoncé semble attendre une réponse du type  $|E_2| \ll |E_0|$  mais le lien avec le rotationnel n'est pas clair.

La condition proposée correspond à l'ARQS : on néglige le temps de propagation du champ EM sur la taille caractéristique du problème  $\tau = a/c$  devant l'échelle temporelle du problème  $T = 1/f$ .

**Q20.**  $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0 = -\frac{q(t)}{\pi a^2 \epsilon_0} \vec{u}_z$  donc par intégration  $V_0(z) = \frac{q(t)z}{\pi a^2 \epsilon_0} + cste$ .

La tension entre les armatures est  $U = V_0(d) - V_0(0) = \frac{q(t)d}{\pi a^2 \epsilon_0}$  donc par définition de la capacité

$$C = \frac{q(t)}{U} = \frac{\pi a^2 \epsilon_0}{d}$$

**Q21.** On utilise 2 fois le diviseur de tension :

$$\underline{u}_{AN} = \underline{V}_A - \underline{V}_N = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e \quad \text{et} \quad \underline{u}_{BN} = \underline{V}_B - \underline{V}_N = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_0} e$$

On peut alors calculer  $\underline{u} = \underline{V}_A - \underline{V}_B = \underline{u}_{AN} - \underline{u}_{BN}$ . On met au même dénominateur et on simplifie pour obtenir :

$$\underline{u} = \frac{R_2 \underline{Z}_0 - R_1 \underline{Z}}{(R_1 + R_2)(\underline{Z} + \underline{Z}_0)} e$$

**Q22.** Le pont est équilibré lorsque  $\underline{u} = 0$  donc lorsque  $R_2 \underline{Z}_0 = R_1 \underline{Z}$ .

On exprime  $\underline{Z}_0 = \frac{R_0}{1+jR_0C_0\omega}$  et  $\underline{Z} = \frac{R_0}{1+jRC\omega}$  et on remplace. En prenant l'inverse il vient :

$$\frac{1}{R_0 R_2} + j \frac{C_0 \omega}{R_2} = \frac{1}{R R_1} + j \frac{C \omega}{R_1}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on a finalement  $R = \frac{R_0 R_2}{R_1}$  et  $C = \frac{C_0 R_1}{R_2}$ .

**Q23. Application numérique :**  $C = C_0 \frac{R_1}{R_2} = 144$  pF donc par lecture graphique  $\varphi = 50\%$ .

## Partie III - Nuisances sonores

### III.1 - Correction acoustique et théorie de la réverbération de Sabine

**Q24.** On néglige la pesanteur et la viscosité du fluide. Et on limite tous les calculs à l'ordre 1 en  $\frac{p_1}{p_0}$ ,  $\frac{\rho_1}{\rho_0}$  et  $\frac{v_1}{c}$ .

**Q25.** D'après l'équation d'EULER,  $(\rho_0 + \rho_1) \left( \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1 \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(p_0 + p_1)$ .

$(\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_1$  et  $\rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$  sont des termes d'ordre 2 non pris en compte dans le cadre de l'approximation acoustique.

Par ailleurs,  $p_0$  est constante, donc son gradient est nul. En projetant sur  $\vec{u}_x$ , on obtient  $\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$ , soit  $\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$

D'après l'équation de conservation de la masse, on a :  $\frac{\partial(\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \text{div}((\rho_0 + \rho_1) \vec{v}_1) = 0$ .

$\rho_0$  est une constante, donc sa dérivée par rapport au temps est nulle, et  $\rho_1 v_1$  est un terme d'ordre 2.

On en déduit que  $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$

**Q26.** Le coefficient de compressibilité isentropique s'écrit  $\chi_S = \frac{1}{\rho_0 + \rho_1} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \approx \frac{1}{\rho_0 + \rho_1} \frac{\rho_1}{p_1}$ .

En ne gardant que les termes d'ordre 1, on obtient  $\chi_{S_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0 p_1}$ , soit  $\rho_1 = \rho_0 \chi_{S,0} p_1$

**Q27.** A partir de l'équation d'EULER, on a  $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = -\rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t}$ .

En combinant avec l'équation de conservation de la masse,  $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}$ , d'où  $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_{S,0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

La célérité des ondes acoustiques s'écrit  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_{S,0}}}$

**Q28.** Le fluide évoluant de manière isentropique, on peut utiliser les lois de LAPLACE, soit  $pV^\gamma = cst$  et  $p\rho^{-\gamma} = cst$ .

En différenciant cette relation, on obtient  $\rho^{-\gamma} dp - \gamma p \rho^{-\gamma-1} d\rho = 0$ . On en déduit que  $\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\gamma p}$ , d'où  $\chi_{S,0} = \frac{1}{\gamma p_0}$ .

On obtient finalement 
$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

**Q29.** En utilisant les complexes à partir de l'équation d'EULER linéarisée, on a

$$j\omega\rho_0 v_1 = -(-jk)p_1, \text{ d'où } Z_c = \rho_0 \frac{\omega}{k}, \text{ soit } \boxed{Z_c = \rho_0 c}$$

Pour une onde se propageant en sens inverse,  $Z_c = -\rho_0 c$ .

**Q30.** Le premier terme correspond à l'énergie cinétique moyenne massique, et le second à l'énergie potentielle moyenne massique associée à la pression. Comme  $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ , on a

$$\text{On a } \langle e \rangle_T = \frac{1}{4} \rho_0 v_{1,m}^2 + \frac{1}{4} \chi_{S,0} p_{1,m}^2 = \frac{1}{4} p_{1,m}^2 \left( \frac{\rho_0}{\rho_0^2 c^2} + \frac{1}{\rho_0 c^2} \right).$$

On obtient finalement 
$$\langle e \rangle_T = \frac{p_{1,m}^2}{2\rho_0 c^2}$$

**Q31.** Une pression correspondant à une force surfacique, on a  $[I] = \frac{[F].[v]}{[S]}$  ce qui est bien la dimension d'une puissance surfacique.

Par ailleurs,  $I = \frac{\langle p_1^2 \rangle_T}{Z_c} = \frac{p_{1,m}^2}{2\rho_0 c}$ , d'où  $\boxed{I = \langle e \rangle_T \cdot c}$

**Q32.** On a  $\boxed{\mathcal{P}_a = \alpha_m I_r S}$  et  $\boxed{\mathcal{E} = 4 \frac{I_r}{c} V}$

**Q33.** La variation d'énergie contenue dans la pièce sur une durée  $dt$  s'écrit  $d\mathcal{E} = \frac{4V}{c} dI_r = -\mathcal{P}_a dt = -\alpha_m I_r S dt$ .

On en déduit que 
$$\frac{dI_r}{dt} + \frac{\alpha_m c S}{4V} I_r = 0$$

On pose  $\tau = \frac{4V}{\alpha_m c S}$ , et on obtient  $\boxed{I_r(t) = I_{r,0} e^{-t/\tau}}$

**Q34.** On a  $10 \log \left( \frac{I(T_r)}{I_{r,0}} \right) = -60$ , soit  $\log(e^{-t/\tau}) = -6$ . On obtient  $\boxed{T_r = 6 \ln(10) \tau}$

En remplaçant  $\tau$ , on a  $T_r = \frac{24 \ln(10) V}{\alpha_m c S}$ . Comme  $\frac{24 \ln(10)}{c} = 0,16$ , on obtient  $\boxed{T_r = 0,16 \frac{V}{\alpha_m S}}$

**Q35.** Pour la salle vide, si on considère  $T_r = 5,0$  s avec  $V = h \times L \times \ell$  et  $S = 2(L \times \ell + L \times h + \ell \times h)$ , on obtient  $\alpha_{m,v} = 0,084$ .

En considérant que le public est uniquement sur la surface du bas de la salle, on obtient un temps de réverbération avec le

public qui vaut 
$$\boxed{T_r = 0,16 \frac{h \times L \times \ell}{\alpha_{m,v}(L \times \ell + 2L \times h + 2\ell \times h) + \alpha_{m,p} L \times \ell} = 1,4 \text{ s}}$$

Cette valeur correspond bien au temps d'écoute optimal à 1000 Hz de la figure 7.

La qualité d'écoute du concert avec un public est bien satisfaisante.

### III.2 - Principe d'un silencieux à résonateur de Helmholtz

**Q36.** On a  $\boxed{\vec{F}_p = (p_0 - p_c) s \vec{u}_x}$ .

Comme l'air subit une transformation isentropique, on peut utiliser les lois de Laplace, soit  $p_0 V_c^\gamma = p_c (V_c - sx)^\gamma$ .

On en déduit que  $p_c = p_0 \left( 1 - \frac{sx}{V_c} \right)^{-\gamma}$ , soit  $\boxed{p_c = p_0 \left( 1 + \frac{\gamma s x}{V_c} \right)}$

On a alors  $\vec{F}_p = -\frac{p_0 \gamma s^2}{V_c} x \vec{u}_x$ , soit  $k = \frac{p_0 \gamma s^2}{V_c}$ . Comme  $\gamma = \frac{\rho_0 c^2}{p_0}$ , on obtient finalement  $\boxed{k = \frac{\rho_0 c^2 s^2}{V_c}}$

**Q37.** On applique le PFD à la tranche de fluide dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

Projeté horizontalement, on ne prend en compte que la résultante des forces de pression.

La masse de la tranche de fluide vaut  $\rho_0 \ell s$ , d'où  $\rho_0 \ell s \ddot{x} = -\frac{\rho_0 c^2 s^2}{V_c} x$ .

On en déduit que  $\boxed{\ddot{x} + \frac{c^2 s}{\ell V_c} x}$ , ce qui correspond à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c^2 s}{\ell V_c}}$ .

La fréquence propre de l'oscillateur s'écrit donc 
$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c^2 s}{\ell V_c}}}$$

**Q38.** On s'attend à des oscillations sinusoïdales, et on obtient des oscillations amorties à cause de la viscosité de l'air.

On observe une vingtaine d'oscillations, donc  $Q \approx 20$

Pour un calcul plus rigoureux : on a  $x(t) = x_0 e^{-\omega_0 t/2Q} \cos(\Omega t + \varphi)$  donc  $\ln\left(\frac{x(nT)}{x_0}\right) = -\frac{n\omega_0 T}{2Q}$  avec  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ .

Comme on observe beaucoup d'oscillations, on peut supposer que  $\omega_0 \approx \Omega$  (suggéré dans la question suivante). On a ainsi

$$\ln\left(\frac{x(nT)}{x_0}\right) = -\frac{n\pi}{Q} \text{ et } Q = \frac{n\pi}{\ln\left(\frac{x_0}{x(nT)}\right)} = 27 \text{ (estimé avec } n = 10)$$

**Q39.** On a  $f_{0,\text{calculée}} = 118 \text{ Hz}$  et  $f_{0,\text{mesurée}} = 100 \text{ Hz}$

Les deux valeurs sont plutôt proches, et la prise en compte des couches d'air mises en mouvement font augmenter la masse donc diminuer la fréquence des oscillations.

**Q40.** Avec la suppression sinusoïdale à l'entrée du col, le PFD de la question 37 devient  $\rho_0 \ell s \ddot{x} + \frac{\rho_0 c^2 s^2}{V_c} x = p_m s \cos(\omega t)$ , soit  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{p_m}{\rho_0 \ell} \cos(\omega t)$ .

En passant en complexes, on a  $\underline{x}(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{p_m}{\rho_0 \ell} e^{j\omega t}$ , soit  $\underline{x} = \frac{p_m e^{j\omega t}}{\rho_0 \ell (\omega_0^2 - \omega^2)}$

De plus, on a  $\underline{v} = \frac{dx}{dt} = j\omega \underline{x}$ , d'où  $\underline{v}_m = \frac{j\omega p_m}{\rho_0 \ell (\omega_0^2 - \omega^2)}$

La vitesse diverge théoriquement pour  $\omega \rightarrow \omega_0$ , mais en réalité les frottements limitent cette résonance.

**Q41.** On a  $\underline{v}_i(z, t) = \frac{p_{i,m}}{Z_c} e^{j(\omega t - kz)}$ ,  $\underline{v}_r(z, t) = -\frac{p_{r,m}}{Z_c} e^{j(\omega t + kz)}$  et  $\underline{v}_t(z, t) = \frac{p_{t,m}}{Z_c} e^{j(\omega t - kz)}$ .

**Q42.** Comme le fluide ne rencontre pas d'obstacle, il y a conservation de la pression, d'où  $p_m = p_{i,m} + p_{r,m} = p_{t,m}$

Par conservation du débit volumique à l'entrée du résonateur, on a  $(\underline{v}_{i,m} + \underline{v}_{r,m})S = \underline{v}_{t,m}S + \underline{v}_m s$ , d'où  $\underline{p}_{i,m} - \underline{p}_{r,m} = \underline{p}_{t,m} + \underline{v}_m \frac{sZ_c}{S}$

**Q43.** 
$$L_{TL} = 10 \log \left( 1 + \frac{1}{4\beta^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \right)$$

**Q44.** Le résonateur de HELMHOLTZ est un filtre passe-bande.

Pour  $\beta$  fixé, lorsque  $\alpha$  est plus élevé, le filtre devient moins sélectif, ce qui permet de couper plus de fréquences autour de  $f_0$ .

**\*\*\* FIN DU CORRIGE \*\*\***