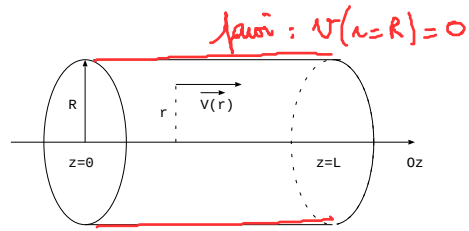


I. Ecoulement de Poiseuille

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux dans un tube cylindrique de rayon R , parallèlement à l'axe Oz du tube, la vitesse est de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$. L'écoulement est dû à un gradient de pression entre les deux extrémités du tube distantes de L , la pression est de la forme $P(z) = P_0 - Kz$ avec K constante positive. On néglige les forces de pesanteur.



1. On donne $\vec{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$.

L'accélération d'une particule fluide est $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v}$

$\vec{v}$ ne dépend pas de t

$$\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} = v(r)\vec{e}_z \left[\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \right] = v(r)\frac{\partial}{\partial z}$$

d'où $\vec{a} = \vec{0}$ les particules fluide ont un mouvement rectiligne uniforme

pas d'autres forces ici

2. L'équation de Navier-Stokes s'écrit:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v} \right] = -\vec{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v}$$

termes négligés

$$\vec{\text{grad}} P = \vec{\text{grad}} (P_0 - Kz) = \frac{\partial}{\partial z} (P_0 - Kz) \vec{e}_z = -K \vec{e}_z$$

$$\vec{0} = +K \vec{e}_z + \eta \Delta (v(r)\vec{e}_z) = +K \vec{e}_z + \eta \Delta v(r) \vec{e}_z$$

$$\text{d'où } \Delta v(r) = -\frac{K}{\eta}$$

! ne pas développer $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)!$

3. On donne $\Delta v(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{K}{\eta}$

$$\text{on a: } \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{Kr}{\eta}, \text{ on intègre: } r \frac{dv}{dr} = -\frac{Kr^2}{2\eta} + A$$

$$\text{on a: } \frac{dv}{dr} = -\frac{Kr}{2\eta} + \frac{A}{r}$$

$$\text{on intègre: } v(r) = -\frac{Kr^2}{4\eta} + A \ln r + B$$

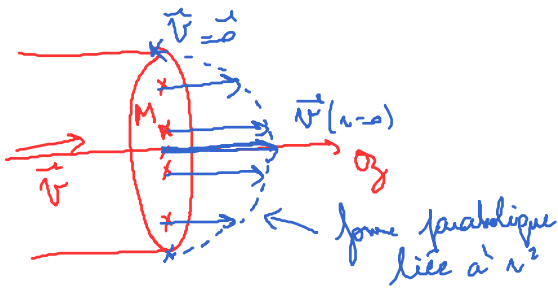
! $v(r)$ doit être finie pour $0 \leq r \leq R$ ou $\ln r$ diverge en $r=0$ donc $A=0$

C.L. le fluide adhère aux parois: $v(r=R)=0$

$$v(r=R)=0 = -\frac{KR^2}{4\eta} + B \Rightarrow B = \frac{KR^2}{4\eta}$$

$$\text{d'où } v(r) = \frac{K}{4\eta} (R^2 - r^2)$$

4. Représenter le profil des vitesses sur une section perpendiculaire à l'écoulement et calculer le débit volumique à travers une section du tube. En déduire la vitesse moyenne du fluide.



$$V(r) = \frac{K}{4\eta} (R^2 - r^2)$$

au l'axe : $r=0$: $V = \frac{KR^2}{4\eta}$

sur le bord : $r=R$: $V=0$

$$D_v = \iint V(M) dS$$

avec M qui appartient à la surface traversée par le fluide et $\perp$ à $\vec{v}$:
 $M(r, \theta)$ donc $dS = dr \times r d\theta$

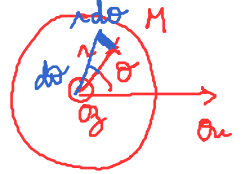
$$D_v = \iint \frac{K}{4\eta} (R^2 - r^2) dr d\theta$$

$$= \frac{K}{4\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) dr \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

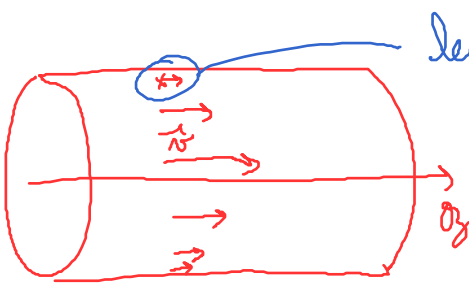
$$\boxed{D_v} = \frac{K}{4\eta} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) 2\pi = \frac{K\pi R^4}{8\eta}$$

surface
circulaire

$$= V_{\text{moy}} \times \pi R^2 \Rightarrow \boxed{V_{\text{moy}} = \frac{KR^2}{8\eta}}$$



5. Déterminer qualitativement le sens de la force exercée par le fluide sur le tube.



les particules fluide adhèrent aux parois, elles entraînent le tube dans les mûs : elles exercent sur le tube une force selon $(+ Oz)$