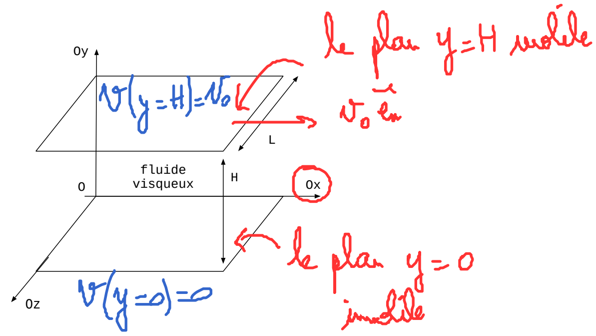
I. Ecoulement de Couette

On considère l'écoulement unidimensionnel permanent d'un liquide de masse volumique ρ et de viscosité η entre deux plans parallèles de surface S très grande et distants de H. Le fluide sera supposé soumis aux seules forces de pression et viscosité. L'écoulement, appelé écoulement de Couette, est de la forme $\boxed{\vec{v} = v(x,y)\vec{e_x}}$. On suppose la pression au sein du fluide uniforme et égale à P_0. L'écoulement est du au déplacement du plan supérieur à la vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e_x}$, le plan inférieur restant fixe.

poids négligé



1. L' écoulement est incompressible, en déduire une information sur la vitesse.

$\mathrm{div}\,\vec v = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}$ ici $\vec v = v(x,y)\vec e_x$ $\quad v_x = v(x,y) \quad v_y = v_z = 0$

d'où $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow v$ ne dépend pas de x donc $\boxed{\vec v = v(y)\vec e_x}$

2. Déduire de l'équation de Navier-stokes et des conditions aux limites l'expression de $v(y)$.

$$\rho\left[\underbrace{\cancel{\frac{\partial \vec v}{\partial t}}}_{0} + (\vec v\cdot\overrightarrow{grad})\vec v\right] = \underbrace{\cancel{\rho\vec g}}_{\text{poids négligé}} - \underbrace{\cancel{\overrightarrow{grad}\,P_0}}_{0} + \eta\Delta\vec v$$

ici pas d'autres forces

$\vec v$ ne dépend pas de t

$$\vec v\cdot\overrightarrow{grad} = v(y)\vec e_x\left[\frac{\partial}{\partial x}\vec e_x + \cancel{\frac{\partial}{\partial y}\vec e_y} + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}\vec e_z}\right) = v(y)\frac{\partial}{\partial x}$$

$$(\vec v\cdot\overrightarrow{grad})\vec v = v(y)\frac{\partial}{\partial x}\big(\underbrace{v(y)\vec e_x}_{\text{cste}}\big) = \vec 0$$

d'où $\boxed{\Delta\vec v = \vec 0}$

avec $\Delta\vec v = \cancel{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v(y)\vec e_x)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(v(y)\vec e_x) + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial z^2}(v(y)\vec e_x)} = \frac{d^2 v}{dy^2}\times\vec e_x$

d'où $\boxed{\frac{d^2v}{dy^2} = 0}$ $\qquad \frac{dv}{dy} = A \qquad v(y) = Ay + B$

C.L. le fluide visqueux adhère aux parois

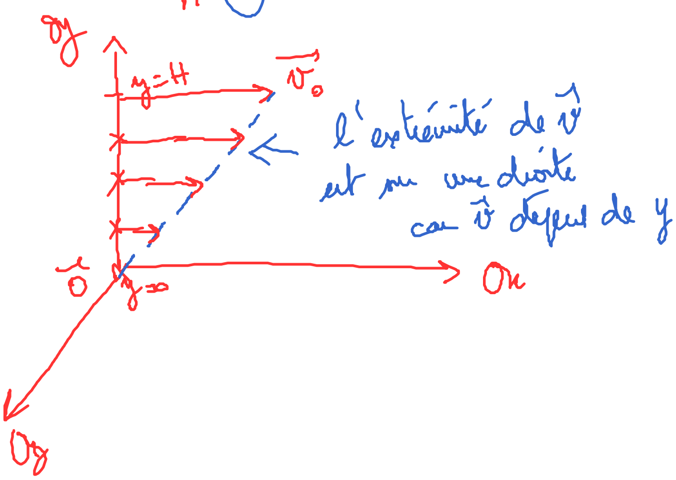
$v(y=0) = 0 = B \Rightarrow B = 0$

$v(y=H) = v_0 = AH + B \Rightarrow A = \frac{v_0}{H}$

$\boxed{\vec v = \frac{v_0}{H}y\,\vec e_x}$

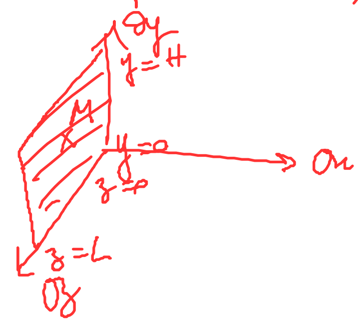
3. Représenter le profil des vitesses sur une section perpendiculaire à l'écoulement et calculer le débit volumique à travers cette section de hauteur H et de largeur L. En déduire la vitesse moyenne de l'écoulement.

$$\vec{v} = \frac{v_0}{H}\, y\, \vec{e}_x$$



$$D_V = \iint v(M)\, dS$$

où M est un point de la surface traversée par le fluide, ⊥ à $\vec{v}$



$M(y, z)$

$dS = dy \times dz$

$$\boxed{D_V = \iint \frac{v_0 y}{H}\, dy\, dz = \frac{v_0}{H}\int_0^H y\, dy \times \int_0^L dz = \frac{v_0}{H} \times \frac{H^2}{2} \times L = \frac{v_0 H L}{2}}$$

$$D_V = v_{moy} \times \underbrace{H L} \rightarrow \boxed{v_{moy} = \frac{\frac{v_0 H L}{2}}{HL} = \frac{v_0}{2}}$$