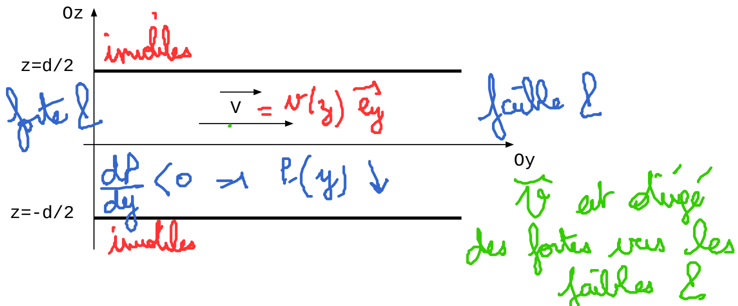
I. Ecoulement de Poiseuille entre deux plans

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux de masse volumique ρ et de viscosité η entre deux plans horizontaux de côtes $z = -d/2$ et $z = +d/2$. On néglige le poids. On étudie un écoulement stationnaire caractérisé par le champ des vitesses $\vec{v} = v(z)\vec{e_y}$ et un champ de pression $P = P(x, y, z)$.



1. Vérifier que le champ de vitesses proposé est compatible avec l'hypothèse d'écoulement incompressible.

$$\text{div}\,\vec{v} = \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} \qquad \vec{v} = v(z)\vec{e_y} \qquad v_x = v_z = 0 \qquad v_y = v(z)$$

variable

$$= \frac{\partial}{\partial y}(v(z)) = 0 \Rightarrow \text{écoulement incompressible.}$$

2. Ecrire l'équation de Navier-Stokes et la projeter sur Ox, Oy et Oz.

$$\rho\left[\underbrace{\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}}_{=0} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right] = \underbrace{\cancel{\rho\vec{g}}}_{\text{on néglige}} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P + \eta\Delta\vec{v}$$

pas d'autres forces ici

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}} = v(z)\vec{e_y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\cancel{\vec{e_x}} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\cancel{\vec{e_z}}\right] = v(z)\frac{\partial}{\partial y}$$

pas

$$(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = v(z)\frac{\partial}{\partial y}\left(v(z)\vec{e_y}\right) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z}$$

$$\Delta\vec{v} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\cancel{v(z)\vec{e_y}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\cancel{v(z)\vec{e_y}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(v(z)\vec{e_y}\right) = \frac{d^2v}{dz^2}\vec{e_y}$$

sur (Ox) : $0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + 0$

$\Rightarrow P$ ne dépend pas de x

sur (Oy) : $0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + \eta\frac{d^2v}{dz^2}$

$$\boxed{\frac{dP}{dy} = \eta\frac{d^2v}{dz^2}}$$

sur (Oz) : $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + 0$

$\Rightarrow P$ ne dépend pas de z

3. On rappelle que lorsque deux fonctions $f(y)$ et $g(z)$ sont égales alors ces deux fonctions sont constantes. On note $\frac{dP}{dy} = -\frac{\Delta P}{L} < 0$. Montrer que la vitesse de l'écoulement s'écrit $v(z) = \frac{\Delta P}{2\eta L}(\frac{d^2}{4} - z^2)$.

$$\underbrace{\frac{dP}{dy}}_{\substack{\text{fonction de } y\\ f(y)}} = \underbrace{\eta\frac{d^2v}{dz^2}}_{\substack{\text{fonction de } z\\ g(z)}} = \text{Constante} = -\frac{\Delta P}{L} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{\Delta P}{L} \rightarrow \boxed{P(y) = -\frac{\Delta P}{L}y + A}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{\Delta P}{L\eta}$$

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{\Delta P}{\eta L}z + B$$

$$\boxed{v(z) = -\frac{\Delta P}{\eta L}\frac{z^2}{2} + Bz + C}$$

C.L. le fluide visqueux adhère aux parois

$$v(z = -\tfrac{d}{2}) = 0 = -\frac{\Delta P}{2\eta L}\frac{d^2}{4} - B\frac{d}{2} + C$$

$$v(z = \tfrac{d}{2}) = 0 = -\frac{\Delta P}{2\eta L}\frac{d^2}{4} + B\frac{d}{2} + C$$

$(-)$ $2B\frac{d}{2} = 0 \Rightarrow B = 0$

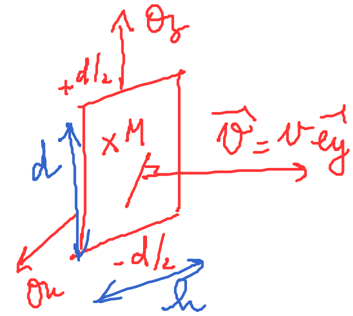
$(+)$ $-\frac{\Delta P d^2}{8\eta L}\cancel{\times 2} = \cancel{2}C$ d'où

$$\boxed{v(z) = \frac{\overset{>0}{\Delta P}}{2\eta L}\left(\overset{>0}{\frac{d^2}{4} - z^2}\right)} > 0 \qquad |z| \leq \frac{d}{2}$$

4. Exprimer le débit volumique à travers une section de largeur h selon Ox et de hauteur d selon Oz. En déduire la vitesse moyenne de l'écoulement.

$D_v = \iint v(M)\,dS$ avec M un point de la surface traversé par le fluide et $\perp$ à $\vec{v}$

$M(x, z)$ $\qquad dS = dx\,dz$



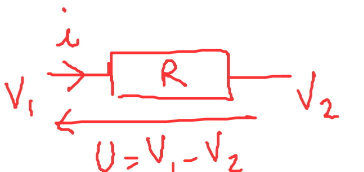
$$D_v = \iint \frac{\Delta P}{2\eta L}\left(\frac{d^2}{4} - z^2\right) dx\,dz$$

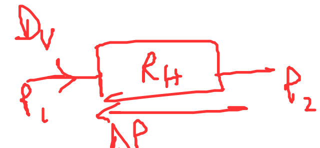
$$= \frac{\Delta P}{2\eta L} \underbrace{\int_{-d/2}^{+d/2}\left(\frac{d^2}{4} - z^2\right) dz}_{} \times \int_0^h dx$$

$$= 2 \times \int_0^{d/2}\left(\frac{d^2}{4} - z^2\right) dz = 2\left[\frac{d^2}{4}z - \frac{z^3}{3}\right]_0^{d/2} = 2\left(\frac{d^2}{4}\frac{d}{2} - \frac{d^3}{3\times 8}\right) = \frac{\cancel{4}}{3}\frac{d^3}{\cancel{8}_2} = \frac{d^3}{6}$$

$$D_v = \frac{h\Delta P\, d^3}{12\eta L} = v_{moy} \times \underbrace{hd}_{surface} \Rightarrow v_{moy} = \frac{\Delta P\, d^2}{12\eta L}$$

5. A partir d'une analogie électrique, définir la notion de résistance hydraulique en fonction de ΔP et D_v. Donner ici son expression en fonction de L, h, d et η.





$R_H = \left(\frac{U}{i}\right) = \frac{\Delta P}{D_v}$

$V_1 - V_2$: ddp qui met en mvt les charges

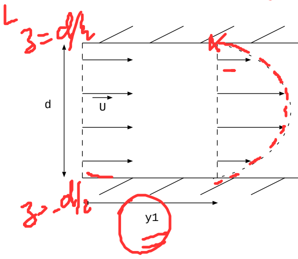
$\Delta P = P_1 - P_2$: dd pression qui met en mvt le fluide

i : flux de charges / débit

D_v : débit de volume

$$\boxed{R_H = \frac{\cancel{\Delta P}\, h}{\frac{\cancel{\Delta P}\, d^3}{12\eta L}} = \frac{12\eta L h}{d^3}}$$

6. *Question moins classique, suivez le guide* : On examine maintenant le phénomène d'entrée dans le dispositif. Le fluide en écoulement laminaire uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{e_y}$ pénètre entre les deux plaques distantes de d.



$v \propto z^2$ profil parabolique

6.a. Dans la zone de longueur y_1 selon Oy, le régime d'écoulement n'est pas stationnaire, la vitesse est de la forme $\vec{v} = v_y(z, t)\vec{e_y}$. En négligeant les variations de pression dans cette zone, montrer que v_y vérifie une équation de type équation de diffusion. En déduire un ordre de grandeur de la durée de diffusion τ du vecteur vitesse sur une distance L.

6.b. En écrivant que τ est aussi le temps que met le fluide pour parcourir la zone de longueur y_1, en déduire l'expression de y_1 en fonction de U, d, η et ρ.

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\cancel{(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}}}_{=0}\right] = \underbrace{\cancel{\rho\vec{g}}}_{\text{négligé}} - \underbrace{\cancel{\overrightarrow{grad}\,P}}_{\text{négligé}} + \eta\Delta\vec{v} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}}$$

éq. de diffusion $\left(\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n\right)$

analyse dimensionnelle : $\frac{v}{\tau} = \frac{\eta}{\rho}\frac{v}{L^2} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho L^2}{\eta}}$ et $\tau = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} = \frac{y_1}{U} \Rightarrow \frac{\rho L^2}{\eta} = \frac{y_1}{U}$