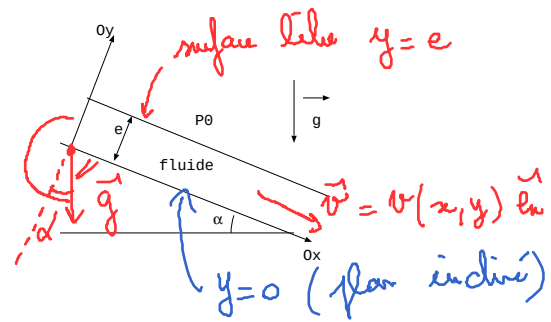


I. Ecoulement sur un plan incliné

Un liquide de viscosité η , de masse volumique ρ s'écoule sur un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale sur une hauteur e . L'écoulement est permanent et incompressible. La vitesse s'écrit $\vec{v} = v(x, y) \vec{e}_x$ et la pression ne dépend que de y , on la note $P(y)$.



1. Que peut-on déduire de l'hypothèse d'un écoulement incompressible sur l'expression de la vitesse?

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{ici } \vec{v} = v(x, y) \vec{e}_x \quad v_x = v(x, y) \quad v_y = v_z = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (v(x, y)) = 0 \Rightarrow \underline{v \text{ ne dépend pas de } x} \quad \boxed{\vec{v} = v(y) \vec{e}_x}$$

2. Projeter sur Ox et Oy l'équation de Navier-Stokes.

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \text{grad } P + \eta \Delta \vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot \text{grad} = v(y) \vec{e}_x \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \dots \right) = v(y) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v(y) \frac{\partial}{\partial x} (v(y) \vec{e}_x) = \vec{0}$$

$$\text{grad } P(y) = \frac{dP}{dy} \vec{e}_y$$

$$\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v(y) \vec{e}_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (v(y) \vec{e}_x) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (v(y) \vec{e}_x) = \frac{d^2 v}{dy^2} \vec{e}_x$$

$$\vec{g} = (\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y) g$$

$$= (\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \vec{e}_x + \cos(\pi + \alpha) \vec{e}_y) g$$

$$\text{sur } (Ox): 0 = \rho g \sin \alpha + \eta \frac{d^2 v}{dy^2}$$

$$\text{sur } (Oy): 0 = -\rho g \cos \alpha - \frac{dP}{dy} + 0$$

$$\boxed{\frac{dP}{dy} = -\rho g \cos \alpha} \quad (*)$$

$$\text{et } \boxed{\frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta}}$$

3. L'atmosphère impose la pression P_0 uniforme à l'interface avec le fluide. Montrer que $P(y) = P_0 - \rho g \cos \alpha (y - e)$.

$$(*) \Rightarrow P(y) = -\rho g \cos \alpha y + A$$

C.L. surface libre :

$$P(y=e) = P_0 = -\rho g \cos \alpha e + A$$

$$A = P_0 + \rho g \cos \alpha e$$

$$\boxed{P(y) = P_0 - \rho g \cos \alpha (y - e)}$$

4. En déduire $V(y)$ en fonction de deux constantes d'intégration. Que vaut $V(y=0)$? justifier votre réponse. On a $\frac{dv}{dy}(y=e)=0$ par continuité de la force de viscosité en $y=e$. En déduire les deux constantes d'intégration.

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = - \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta}$$

$$\parallel \frac{dv}{dy} = - \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} y + B$$

$$v(y) = - \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \frac{y^2}{2} + By + C =$$

C.L.O. le fluide ne s'écoule pas adhérence aux parois
 $v(y=0) = 0 = C$

$$\frac{dv}{dy}(y=e) = 0 = - \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} e + B$$

$$B = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} e$$

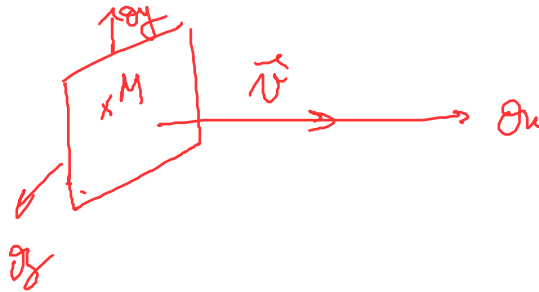


$$v(y) = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \left(ey - \frac{y^2}{2} \right)$$

5. Calculer le débit volumique à travers une section de largeur L selon Oz .

$\mathcal{D}_v = \iint v(M) dS$ où M est un point de la surface traversée par le fluide $\perp$ à $\vec{v}$

$$M(y, z) \quad dS = dy \times dz$$



$$\mathcal{D}_v = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \int_0^e \left(ey - \frac{y^2}{2} \right) dy \times \int_0^L dz$$

$$\left[\mathcal{D}_v = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \left(e \frac{e^2}{2} - \frac{e^3}{2 \times 3} \right) L = \frac{\rho g \sin \alpha e^3 L}{2 \eta} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\rho g \sin \alpha e^3 L}{3 \eta} \right]$$