Révisions de mécanique des fluides

I. **Etude d'une tornade**

Une tornade est un tourbillon de vents extrêmement violents prenant généralement naissance à la base des cumulonimbus orageux. Il s'agit d'un phénomène météorologique au pouvoir destructeur.

Dans cet exercice, la tornade est modélisée par un vortex cylindrique de rayon R et d'axe Oz. L'écoulement d'air est supposé parfait, incompressible, homogène et stationnaire. Les effets de pesanteur sont négligés et on note μ la masse volumique de l'air.

Le champ de vitesse est décrit par la relation $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{e_\theta}$ et un vecteur tourbillon nul pour $r > R$ et égal à $\overrightarrow{\Omega} = \Omega_0\overrightarrow{e_z}$ pour $0 \leq r \leq R$.

1. Définir les notions d'écoulement parfait, incompressible et stationnaire.

2. Donner l'allure des lignes de courant.

3. Etablir les expressions de la vitesse $v(r)$ dans les deux domaines considérés. On précise que $v(r = 0) = 0$ et $v(r \to \infty) = 0$.

4. On suppose que la pression loin de la tornade est égale à la pression atmosphérique P_a. Déduire du théorème de Bernoulli, l'expression de $P(r)$ pour $r > R$.

5. Déduire de la relation d'Euler, l'expression de $P(r)$ pour $0 \leq r \leq R$.

6. Pour quelle valeur de r, la dépression $P(r) - P_a$ est-elle la plus élevée? Commenter.

Données: en coordonnées cylindriques:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{f} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (rf_\theta)}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rf_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}.$$

Réponses: 3- $v(r < R) = \frac{\Omega_0 r}{2}$ *et* $v(r > R) = \frac{\Omega_0 R^2}{2r}$ *4-* $P(r) = P_a - \frac{\rho\Omega_0^2 R^4}{8r^2}$ *5-* $P(r) = \frac{\rho\Omega_0^2 r^2}{8} + P_a - \frac{\rho\Omega_0^2 R^2}{4}$

II. **Ecoulement de l'eau sous un ski**

Un skieur de fond avance en ligne droite, sur un sol enneigé horizontal, à la vitesse $v_0\overrightarrow{e_x}$ et à partir de l'instant $t = 0$ le skieur n'utilise plus ni ses jambes ni ses bâtons, sa vitesse s'écrit alors $v_s(t)\overrightarrow{e_x}$. L'aire de contact entre les skis et la neige est $S = 0,05\ m^2$, la largeur d'un ski étant $L = 5\ cm$. Sous les skis il y a une fine couche d'eau liquide d'épaisseur e dans laquelle champ de vitesse s'écrit $v(x, y, z, t)\overrightarrow{e_x}$ et le champ de pression $P = P(z)$. $z = 0$ correspond à l'interface liquide-neige.

Données: masse du skieur avec ses skis $m = 80\ kg$, viscosité de l'eau $\eta = 2.10^{-3}\ Pa.s$, épaisseur du film d'eau $e = 6\ \mu m$, la force de viscosité de l'eau sur une surface S s'écrit $\eta S\frac{\partial v}{\partial z}$.

1. Montrer que le champ de vitesse de l'eau sous le ski peut se simplifier en $v(z, t)\overrightarrow{e_x}$.

2. On fait l'hypothèse que l'écoulement sous les skis est quasi stationnaire, déduire de l'équation de Navier Stokes que la vitesse de l'eau sous le ski s'écrit $\frac{v_s(t)z}{e}\overrightarrow{e_x}$.

3. Exprimer le débit volumique d'eau sous le ski et représenter le profil des vitesses.

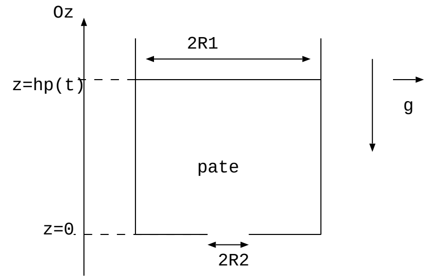
4. Montrer, en appliquant la RFD au système skieur-skis, que la vitesse du skieur peut s'écrire $v_s(t) = v_0 e^{-t/\tau}$ où τ est à exprimer en fonction des données du problème. AN: calculer τ.

5. On ne fait plus l'hypothèse d'un régime quasi stationnaire. Montrer que l'équation de Navier Stokes conduit à une équation de diffusion vérifiée par la vitesse v d'écoulement de l'eau sous le ski. En déduire un temps caractéristique de diffusion, à calculer et à comparer à τ. Conclure.

Réponses: 3- $D_v = \frac{v_s L e}{2}$ *4 -* $\tau = \frac{me}{\eta S}$ *5-* $t_{diff} = \frac{\rho e^2}{\eta}$

III. **Déversoir de pâte à gâteau**

Le but du déversoir de pâte est de faire couler dans des petits moules un volume de pâte à gâteau constant de manière automatisée. On cherche donc à déterminer le temps de coulée afin de connaître la durée pendant laquelle l'actionneur motorisée doit laisser s'écouler la pâte.



On modélise le réservoir par un cylindre de rayon R_1 rempli d'une hauteur initiale de pâte h_0 baignant dans l'air atmosphérique de pression P_0. A l'instant $t = 0$, la pâte s'écoule à l'air libre à travers une section cylindrique de rayon R_2. On désigne par $h_p(t)$ la hauteur de la pâte à l'instant t. La pâte est assimilée à un fluide incompressible de masse volumique ρ. On néglige tout effet dissipatif et on se place en régime quasi-stationnaire.

1. Exprimer la vitesse v_1 de la pâte sur la surface libre en haut du déversoir, en fonction de $h_p(t)$, g, R_1 et R_2.

2. Donner la relation simple entre v_1 et $\dfrac{dh_p}{dt}$. En déduire le temps qu'il faut pour vider le déversoir.

3. On remplit le déversoir avec la quantité de pâte nécessaire pour faire 10 petits gâteaux contenant chacun 80 g de pâte. Calculer le temps nécessaire pour remplir les 10 moules. Données: $\rho = 1,1.10^3\ kg.m^{-3}$, $R_1 = 5\ cm$, $R_2 = 0,7\ cm$, $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

4. Vérifier que $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est bien négligeable devant $\vec{g}$. Quelle hypothèse cela permet-il de valider?

Réponses: 1- $v_1 = \sqrt{\dfrac{2gh_p}{(\frac{R_1^4}{R_2^4} - 1)}}$ *3-* $t = \sqrt{\dfrac{2h_0}{g}(\dfrac{R_1^4}{R_2^4} - 1)}$, $h_0 = 9,2\ cm$ *et* $t = 7,0\ s$

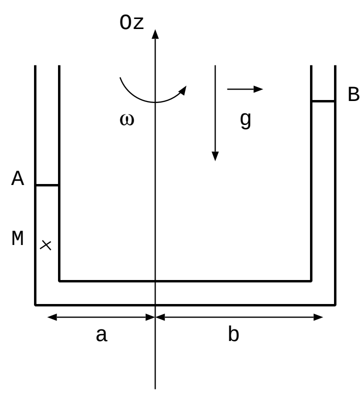
IV. **Tube en rotation**

On considère un tube en U en rotation uniforme autour de l'axe Δ à la vitesse de rotation instantanée $\vec{\omega} = \omega\vec{e_z}$. On s'intéresse au régime établi. Le tube contient un liquide de masse volumique ρ.

1. Appliquer la RFD à une particule fluide de volume $d\tau$ dans un référentiel bien choisi.

2. En déduire l'expression de la pression dans le fluide en fonction d'une constante d'intégration.

3. Exprimer les hauteurs h_A et h_B en fonction de la vitesse de rotation ω, h_0, g, a et b.



On donne le gradient en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}} = \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$

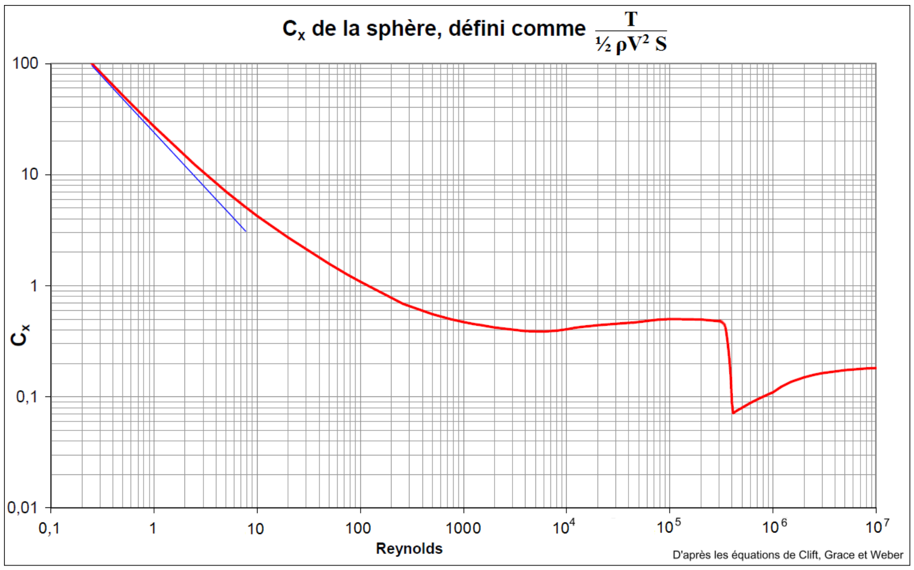
Réponses: 2- $P(r,z) = -\rho g z + \dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2} + C$ *3-* $h_B = h_0 + \dfrac{\omega^2}{4g}(b^2 - a^2)$

V. **Chalutier**

Un chalutier tracte un filet rempli de poissons (assimilé à une sphère de rayon $R = 2\ m$) à la vitesse de $2\ m/s$. Donner un ordre de grandeur de la puissance nécessaire à ce tractage.

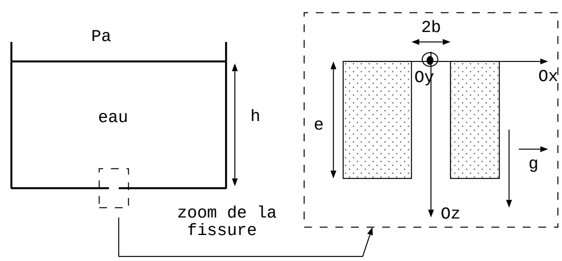
Données: masse volumique de l'eau de mer : $\rho = 1025\ kg.m^{-3}$ viscosité dynamique de l'eau de mer $\eta = 1,23.10^{-3}\ Pl$.

Courbe donnant C_x en fonction du nombre de Reynolds pour une sphère:



VI. **Microfissure dans un réservoir**

Une citerne est remplie d'eau sur une hauteur $h = 1\ m$ considérée constante. Le fond de la citerne, d'épaisseur $e = 2\ cm$ comporte une fissure de longueur $a = 5\ cm$ et de largeur $2b = 10\ \mu m$. L'eau s'écoule par la fissure dans l'atmosphère à la pression $P_a = 1\ bar$. L'écoulement est visqueux ($\eta = 10^3\ Pl$), permanent et incompressible de masse volumique ρ.



On s'intéresse à l'écoulement dans la fissure où le point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). On note $P(x, y, z)$ et $\vec{v} = v(x, y, z)\vec{e_z}$ les champs de pression et de vitesse. L'axe Oz est **descendant.**

1. Justifier que l'on puisse écrire $\vec{v} = v(x)\vec{e_z}$.

2. Montrer que $P = P(z)$ et que $\eta\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dP}{dz} - \rho g = A$ où A est une constante.

3. On suppose que $P(z = 0) - P_a \approx \rho gh$. Justifier cette équation et montrer que $A = -\rho g(1 + \frac{h}{e})$.

4. Donner l'expression de $v(x)$ en fonction de ρ, g, h, e, b, z et η.

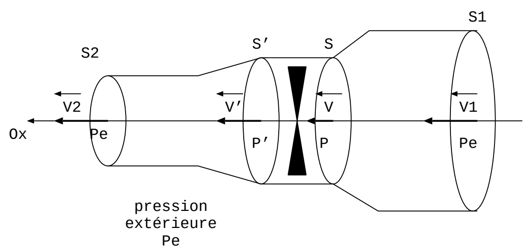
5. Exprimer le débit volumique d'eau à travers la microfissure et la vitesse moyenne. Faire l'AN.

6. Calculer le nombre de Reynolds de cet écoulement et commenter.

Réponses: 2- deux fonctions qui ne dépendent pas de la même variable et qui sont égales, sont égales à la même constante 4- $v(x) = \frac{\rho g(1 + h/e)}{2\eta}(b^2 - x^2)$ *5-* $D_v = \frac{2ab^3\rho g}{3\eta}(1 + \frac{h}{e})$ *et* $v_{moy} = \frac{2b^2\rho g}{3\eta}(1 + \frac{h}{e}) = 8,3.10^{-3}\ m.s^{-1}$

VII. **Propulseur de plongée**

Les plongeurs ont parfois recours à un propulseur de plongée nommé scooter, leur permettant de se propulser plus rapidement et d'explorer davantage les fonds marins. Celui-ci est simplement composé d'une hélice animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Ox et peut faire atteindre au plongeur une vitesse maximale de 10 km/h. L'étude est faite dans le référentiel galiléen R' lié à l'appareil. On considère un tube de courant possédant la symétrie de révolution autour de Ox et s'appuyant sur les pales de l'hélice. Ce tube de courant définit une surface fermée, constituée d'une surface latérale S_{lat} et des sections droites amont et aval S_1 et S_2. La pression à l'extérieur est uniforme et égale à P_e.



Sur la surface S_1, la vitesse du fluide est uniforme et égale à $V_1\overrightarrow{e_x}$

Sur la surface S_2, la vitesse du fluide est uniforme et égale à $V_2\overrightarrow{e_x}$

Au voisinage de l'hélice, on considère deux sections S et S' d'aire sensiblement égale à S :

- sur la surface S, la vitesse est $V\overrightarrow{e_x}$ et la pression est P
- sur la surface S', la vitesse est $V'\overrightarrow{e_x}$ et la pression est P'

Au voisinage proche de l'hélice entre S et S' l'écoulement est perturbé et il existe une discontinuité de la pression de part et d'autre de l'hélice. L'eau de mer sera supposé un fluide parfait et incompressible, en écoulement stationnaire. On néglige l'influence de la pesanteur.

1. Donner les relations entre les surfaces et les vitesses. Que conclure sur V et V'?

2. Exprimer la différence de pression $P - P'$ en fonction de ρ, V_1 et V_2 en utilisant le théorème de Bernouilli.

3. Evaluer la force $\overrightarrow{F}$, résultante des forces exercées par l'hélice sur le fluide, en faisant un bilan de quantité de mouvement dans le système fermé et mobile compris entre S et S' à l'instant t.

4. Evaluer la force $\overrightarrow{F}$, résultante des forces exercées par l'hélice sur le fluide, en faisant un bilan de quantité de mouvement dans le système fermé et mobile compris entre S_1 et S_2 à l'instant t.

5. En déduire l'expression de V en fonction de V_1 et V_2.

Réponses: 2 $P' - P = \dfrac{\rho(V_2^2 - V_1^2)}{2}$ *3-* $\overrightarrow{F} = (P' - P)S\overrightarrow{e_x}$ *4-* $\overrightarrow{F} = D_m(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1})$ *5-* $V = \dfrac{V_1 + V_2}{2}$

VIII. **Pression atmosphérique**

Déterminer la pression en haut du Mont Blanc $h = 4807\ m$:

Cas 1 : en considérant l'atmosphère en équilibre isotherme à la température T_0

Cas 2 : en considérant l'atmosphère en équilibre isentropique, ce qui induit une loi d'évolution de température du type $T(z) = T_0(1 - az)$

Données : $R = 8,31\ SI$, $a = 3,3.10^{-5}\ m^{-1}$ et $g = 9,8\ m.s^{-2}$. L'air de masse molaire $M = 29\ g/mol$ est assimilé à un GP de coefficient $\gamma = 1,4$. Au sol, $T_0 = 273\ K$, $P_0 = 1\ bar$.

Réponses: $P_1 = 0,54\ bar$ *et* $P_2 = 0,51\ bar$