Révisions mécanique

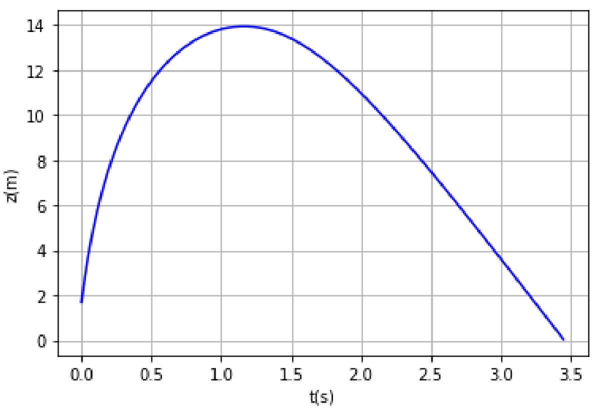
I. Accélération d'une voiture

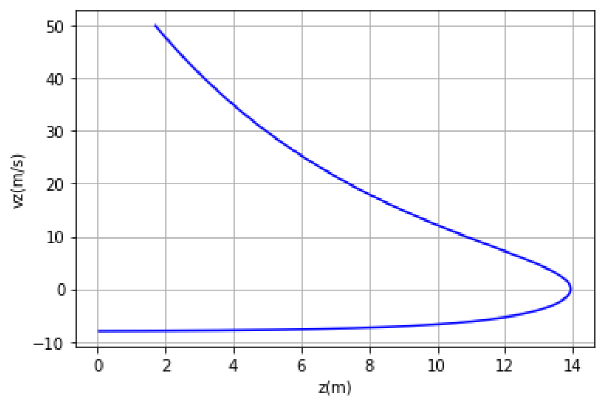
Une voiture se déplace sur une route horizontale et rectiligne. Un petit objet suspendu au rétroviseur s'écarte de la verticale vers l'arrière du véhicule d'un angle de 23^0. Caractériser le mouvement de la voiture et estimer son accélération. Pour la résolution on demande de se placer dans le référentiel de la voiture.

Réponse: $a = 4,1\ m.s^{-2}$

II. Volant de badmington

Un joueur de badmington frappe dans un volant avec sa raquette, lui donnant une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_z}$ verticale ascendante. On donne les courbe représentant $z(t)$ et le portrait de phase v_z en fonction de z. Le champ de pesanteur est noté $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$. Données: $g = 9,8\ m.s^{-2}$, $m = 5,0\ g$ (masse du volant).





1. Déduire des courbes les conditions initiales du volant.

2. On modélise l'action de l'air par une force de frottement de la forme $\overrightarrow{F} = -mh||\overrightarrow{v}||\overrightarrow{v}$. Déduire de la vitesse limite atteinte, la valeur numérique de h.

3. Déduire du théorème de la puissance mécanique que $\dfrac{d(v^2)}{dz} + 2hv^2 = -2g$ pendant la phase ascendante. En déduire $v(z)$ puis l'altitude z_m atteinte. Vérifier que le résultat trouvé est compatible avec les courbes.

4. Déterminer l'équation vérifiée par v^2 pendant la phase descendante.

Réponses: 2- $h = 0,15\ SI$ *3-* $z_{max} = \dfrac{1}{2h}\ln(1 + \dfrac{v_0^2 h}{g}) + z_0$

III. Satellites artificiels

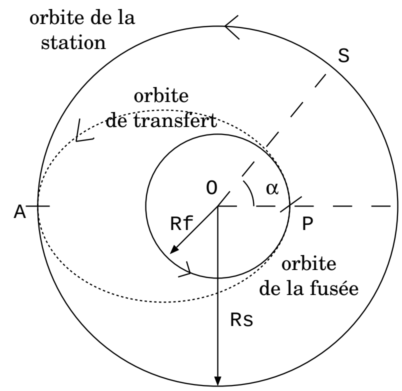
1. Un satellite artificiel est en orbite circulaire basse (altitude $h = 400\ km$) autour de la Terre. Exprimer la période orbitale T, la vitesse orbitale v et l'énergie mécanique E_m en fonction des données. Calculer T et v. Données: rayon terrestre $R_T = 6380\ km$, constante géocentrique $k = \mathcal{G}M_T = 398,6.10^3\ km^3.s^{-2}$.

2. Un satellite artificiel de la Terre est sur une orbite elliptique telle que l'altitude au périgée vaut $h_P = 500\ km$ et et celle à l'apogée $h_A = 30\ 000\ km$. Calculer le demi-grand axe a, la période orbitale T. Utiliser l'énergie mécanique pour calculer la vitesse du satellite au périgée. Quelle est la particularité de cette vitesse?

Réponses: 1- $v = 7,67\ km.s^{-1}$ *et* $T = 1\ h\ 33\ min$*, 2-* $T = 8\ h\ 47\ min$, $v_p = 9,87\ km.s^{-1}$

IV. **Ellipse de transfert**

Une station spatiale décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon R_s. Une fusée de masse m se trouve en orbite circulaire de rayon R_f autour de la Terre de masse M_0. On souhaite que la fusée rejoigne la station spatiale. Pour cela on réalise la manoeuvre suivante : à l'instant t_1, la station spatiale se trouve en un point noté S et la fusée se trouve en un point noté P. On note α l'angle entre OS et OP où O désigne le centre de la Terre. On modifie instantanément la vitesse de la fusée en norme (sans modifier sa direction) de sorte à placer la fusée sur une orbite elliptique appelée ellipse de transfert d'Hohmann. La fusée rejoint la station spatiale à l'instant t_2 en un point noté A.



1. Démontrer, dans le cas d'une orbite circulaire l'expression de la 3ième loi de Kepler. En déduire l'expression de la 3ième loi de Képler pour une orbite elliptique.

2. Exprimer les énergies mécaniques E et E' de la fusée sur l'orbite respectivement circulaire de rayon R_f puis sur l'orbite elliptique. Exprimer la vitesse v' de la fusée en P sur l'orbite elliptique. En déduire la variation de vitesse de la fusée en P à l'instant t_1.

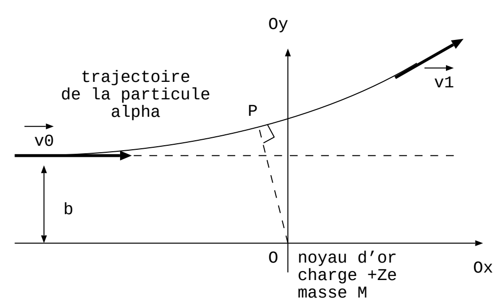
3. Exprimer le temps la durée du transfert $t_2 - t_1$.

4. Exprimer la valeur de α pour que la fusée rencontre la station en A.

Réponses : 1- $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}M_0}}$ *2-*$\Delta v = v' - v = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_0 R_s}{R_f(R_f + R_s)}} - \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{R_f}}$ *4-* $\alpha = \pi(1 - \sqrt{\frac{R_f + R_s}{2R_s}}$

V. **Expérience de Rutherford**

Une particule alpha (masse m et charge $+2e$) est émise à l'infini avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$. Elle se dirige vers un noyau cible d'atome d'or fixe placé en O (masse M et charge $+Ze$). La distance b entre le support de la vitesse initiale et la droite passant par O parallèle à $\overrightarrow{v_0}$ est appelée paramètre d'impact. Soumise à la répulsion coulombienne, la particule alpha décrit une branche d'hyperbole (état libre). On note $\overrightarrow{v_1}$ la vitesse de la particule alpha lorsqu'elle s'éloigne du noyau.



1. Quelle grandeur physique scalaire se conserve au cours du temps? Justifier votre réponse et en déduire une relation entre v_0 et v_1.

2. Quelle grandeur physique vectoriel se conserve? Justifier votre réponse et en déduire que le mouvement de la particule alpha est plan.

On repère la position de la particule alpha par ses coordonnées polaires.

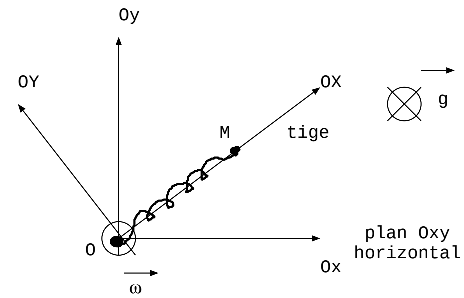
3. Utiliser le moment cinétique de M par rapport à O pour trouver la relation entre r, $\dot{\theta}$, b et v_0.

4. Exprimer l'énergie mécanique de la particule alpha en fonction de r, $\dot{r}$ et des données. Définir et exprimer l'énergie potentielle effective. Représenter l'énergie mécanique et l'énergie potentielle effective sur un même graphe. En déduire la distance minimale d'approche de la particule alpha $r = OP$.

Réponses: 1- $v_1 = v_0$ *3-* $r^2\dot{\theta} = -bv_0$ *4-* $r = OP$ *est solution de* $r^2 - \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2} r - b^2 = 0$

VI. **Ressort en rotation**

Sur une tige, peut coulisser sans frottement une masselotte M de masse m accrochée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. La tige tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe vertical Oz. La position de la masselotte sur la tige est repérée par $x(t)$. On réalise l'étude dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la tige. On note $\overrightarrow{R} = R_x\overrightarrow{e_X} + R_y\overrightarrow{e_Y} + R_z\overrightarrow{e_Z}$ la réaction de la tige sur la masselotte.



1. Préciser quelle composante de la réaction est nulle en justifiant votre réponse. Appliquer la RFD à M dans $\mathcal{R}'$ et la projeter sur OX, OY et Oz.

2. Déduire de l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, la position d'équilibre x_e de la masselotte dans $\mathcal{R}'$ et la condition sur ω pour que M oscille sur la tige. On suppose que la masselotte dans sa position d'équilibre à l'instant $t = 0$ et possède une vitesse relative v_0 selon $+\overrightarrow{e_X}$. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_e, v_0, ω, k, m et t. Exprimer la réaction de la tige sur la masselotte.

3. Montrer que dans $\mathcal{R}'$ la masselotte constitue un système conservatif, exprimer son énergie potentielle et retrouver la position d'équilibre de M.

Réponses : $x_e = \dfrac{l_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}$, *pulsation des oscillations* $\Omega = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \omega^2}$

VII. **Effet de la rotation de la Terre**

Un point matériel M de masse m est lancé depuis le point O, vers le haut selon la verticale ascendante Oz d'un lieu de latitude λ, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_z}$. On note $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur de rotation instantanée de la Terre. On note Ox la direction tangente à un méridien dirigée vers le sud et Oy la direction tangente à un parallèle dirigée vers l'est.

1. Dans un premier temps, on suppose le référentiel terrestre galiléen. Donner l'altitude maximale atteinte par la masse et l'expression de son vecteur vitesse en fonction du temps. En quel point retombe le point matériel.

2. On recherche à déterminer la déviation observée lorsque le point retombe sur Terre. On abandonne l'hypothèse de référentiel terrestre galiléen et on tient compte de la rotation de la Terre sur elle-même. En considérant que la force d'inertie de Coriolis s'exprime en utilisant la loi de vitesse déterminée dans la question précédente, donner une évaluation de cette déviation en précisant sa direction et son sens.

Application Numérique : on prendra $\lambda = 51^0$ pour une altitude maximale atteinte de 100 m.

Réponses: 1- $h_{max} = \dfrac{v_0^2}{2g}$ *et* $\overrightarrow{v}(t) = (v_0 - gt)\overrightarrow{e_z}$ *2-* $\Delta y = -\dfrac{4\Omega\cos\lambda v_0^3}{3g} = -5,7\ cm.$

VIII. **Sismographe**

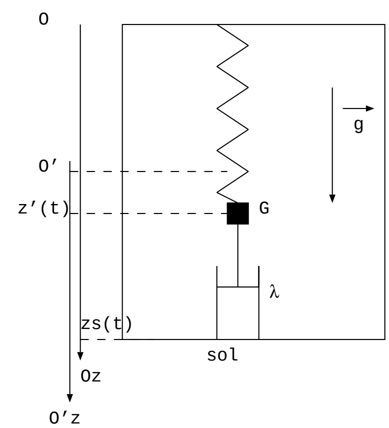
Un sismographe est un instrument chargé d'enregistrer les mouvements de l'écorce terrestre par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen. Il peut être modélisé par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 dont l'extrémité supérieure est solidaire d'un boîtier posé sur le sol.

Une masse m de centre d'inertie G attachée à l'autre extrémité du ressort est reliée à un amortisseur exerçant une force de frottement visqueux de la forme $\overrightarrow{f} = -\lambda \overrightarrow{v}$.

Lorsque l'appareil détecte un séisme le boîtier est animé d'un mouvement vertical de la forme $z_s(t) = Z_0 \cos(\omega t)$.

On note $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel lié au laboratoire supposé galiléen et $\mathcal{R}'(O', \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel lié au boîtier.

On note O' la position d'équilibre de G et $z'(t)$ la position de G par rapport à sa position d'équilibre.



1. Donner l'unité de λ.

2. Dans cette question, le sol ne vibre pas. Déterminer la longueur l_1 du ressort à l'équilibre.

3. Lorsque le sol vibre, effectuer un bilan des forces appliquées à la masse m dans le référentiel lié au boîtier dans le cas où $z_s = Z_0 \cos(\omega t)$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $z'(t)$ et exprimer le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

4. En régime permanent $z'(t)$ est de la forme $Z'_0 \cos(\omega t + \phi)$. Exprimer Z'_0 et ϕ en fonction des données.

5. Représenter l'allure de Z'_0 en fonction de ω pour différentes valeurs de Q. A quelle partie de la courbe correspond la zone de fonctionnement du sismographe?

$$\text{Réponses: 2- } l_1 = l_0 + \frac{mg}{k} \text{ 3- } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}$$