Révisions de mécanique des fluides

I. **Correction: tornade**

1. Parfait: sans viscosité, incompressible: les particules fluides ont une masse volumique constante au cours de leur mouvement, stationnaire: indépendant du temps

2. Les lignes de courant sont des cercles centrés sur Oz.

3. On a $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{v} = \frac{1}{r}\frac{d(rv(r))}{dr}\overrightarrow{e_z}$.

Pour $r < R$: $\frac{d(rv(r))}{dr} = r\Omega_0$ soit $v(r) = \frac{\Omega_0 r}{2} + \frac{A}{r}$ avec $A = 0$ car v ne diverge pas

Pour $r > R$: $\frac{d(rv(r))}{dr} = 0$ soit $v(r) = \frac{B}{r}$ et la continuité de v en $r = R$ donne $v(r) = \frac{\Omega_0 R^2}{2r}$.

4. Hypothèses: écoulement parfait, stationnaire, irrotationnel et incompressible et sans pièce mobile.

On applique Bernoulli dans la zone $r > R$ soit $\frac{\rho v(r)^2}{2} + P(r) = P_a + \frac{\rho v(\infty)^2}{2}$ donc $P(r) = P_a - \frac{\rho\Omega_0^2 R^4}{8r^2}$.

5. On ne peut appliquer Bernoulli que sur une ligne de courant car l'écoulement est rotationnel, or sur une ligne de courant r est constante...

On applique Euler: $\rho(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = -\frac{\rho v^2}{r}\overrightarrow{e_r} = -\frac{dP}{dr}\overrightarrow{e_r}$ soit $\frac{dP}{dr} = \frac{\rho\Omega_0^2 r}{4}$ et $P(r) = \frac{\rho\Omega_0^2 r^2}{8} + A$.

La pression est continue en $r = R$ soit $P(R) = \frac{\rho\Omega_0^2 R^2}{8} + A = P_a - \frac{\rho\Omega_0^2 R^2}{8}$ soit $A = P_a - \frac{\rho\Omega_0^2 R^2}{4}$ soit $P(r) = \frac{\rho\Omega_0^2 r^2}{8} + P_a - \frac{\rho\Omega_0^2 R^2}{4}$.

II. **Ecoulement de l'eau sous un ski**

1. La vitesse est selon Ox, l'écoulement est incompressible donc la vitesse ne dépend pas de x et il y a invariance par translation selon Oy car la dimension du ski selon Oy est grande devant la dimension selon Oz.

2. L'équation de Navier Stokes s'écrit $\rho(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \eta\Delta\overrightarrow{v} + \rho\overrightarrow{g}$

ici on est en régime stationnaire : $\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$

avec $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}} = v(z)\frac{d}{dx}$ et donc $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = v(z)\frac{d}{dx}(v(z)\overrightarrow{e_x}) = \overrightarrow{0}$

avec $\Delta\overrightarrow{v} = \Delta v(z)\overrightarrow{e_x} = \frac{d^2v}{dz^2}\overrightarrow{e_x}$

En projection sur $\overrightarrow{e_x}$: $\eta\frac{d^2v}{dz^2} = 0$ soit $\frac{d^2v}{dz^2} = 0$ donc $\frac{dv}{dz} = A$ et $v(z) = Az + B$.

On utilise les conditions aux limites: le fluide visqueux adhère aux parois soit $v(z = 0) = B = 0$ et $v(z = e) = v_s = Ae$ (l'eau es accrochée au ski qui glisse).

Ainsi $v(z) = \frac{v_s z}{e}$.

En projection sur $\overrightarrow{e_z}$: $-\frac{dP}{dz} + \rho g = 0$.

3. On calcule le débit volumique à travers une surface perpendiculaire à l'écoulement soit à travers un rectangle entre $z = 0$ et $z = e$ et entre $y = 0$ et $y = L$.

$D_v = \iint vdzdy = \frac{v_s}{e}\int_0^L dy\int_0^e zdz = \frac{v_s Le}{2}$.

Le profil des vitesses est linéaire.

4. Le skieur subit son poids et la réaction normale du support, et la force de viscosité exercée par l'eau, cette force s'écrit $-etaS\frac{dv}{dz}\overrightarrow{e_x} = -\eta S\frac{v_s}{e}\overrightarrow{e_x}$: force de traînée.

En appliquant la RFD et en la projetant sur Ox on a $m\dfrac{dv_s}{dt}=-\eta S\dfrac{v_s}{e}$ soit $\dfrac{dv_s}{dt}+\dfrac{\eta S}{me}v_s=0$.

La solution est de la forme $v_s(t)=v_0e^{-t/\tau}$ avec $\tau=\dfrac{me}{\eta S}$.

5. On ne fait plus l'hypothèse d'un régime quasi stationnaire. L'équation de Navier Stokes après simplification (question 2) s'écrit $\rho\dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}=\eta\dfrac{d^2v}{dz^2}\overrightarrow{e_x}-\dfrac{dP}{dz}\overrightarrow{e_z}-\rho g\overrightarrow{e_z}$ soit en projection sur Ox: $rho\dfrac{\partial v}{\partial t}=\eta\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ soit $\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\eta}{\rho}\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$.

Par analyse dimensionnelle, on a $\dfrac{v}{t_{diff}}=\dfrac{\eta}{\rho}\dfrac{v}{e^2}$ soit $t_{diff}=\dfrac{\rho e^2}{\eta}$.

On fait le rapport des deux temps caractéristiques: $\dfrac{t_{dff}}{\tau}=\dfrac{\rho e^2}{\eta}\dfrac{\eta S}{me}=\dfrac{\rho eS}{m}=\dfrac{10^3.6.10^{-6}.5.10^{-2}}{80}\approx 5.10^{-6}<<1$: le temps de diffusion est très petit devant le temps que le ski met pour s'arrêter donc la vitesse varie peu sur l'intervalle de temps pendant lequel agit la viscosité. L'hypothèse du régime quasi stationnaire est vérifiée.

III. **Déversoir de pâte à gâteau**

1. Hypothèses: écoulement incompressible et quasi stationnaire, fluide parfait, pas d'autres forces que le poids et les forces de pression.

On écrit la relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point A_1 sur la surface libre et un point A_2 dans le trou.

$P_0+\dfrac{\rho v_1^2}{2}+\rho g h_p=P_0+\dfrac{\rho v_2^2}{2}+0$ avec la conservation du débit volumique $v_1\pi R_1^2=v_2\pi R_2^2$ soit $frac\rho v_1^2 2(\dfrac{R_1^4}{R_2^4}-1)+\rho g h_p=0$ donc $v_1=\sqrt{\dfrac{2gh_p}{\frac{R_1^4}{R_2^4}-1}}$.

2. Or on a $v_1=-\dfrac{dh_p}{dt}$ (attention $v_1>0$ et $h_p(t)$ et une fonction décroissante en fonction du temps).

On doit donc résoudre $-\dfrac{dh_p}{dt}=\sqrt{\dfrac{2gh_p}{\frac{R_1^4}{R_2^4}-1}}$. On résout en séparant les variables t et h_p.

$$\int_{h_0}^{0}-\frac{dh_p}{\sqrt{h_p}}=\sqrt{\frac{2g}{\frac{R_1^4}{R_2^4}-1}}\int_0^{t_f}dt \text{ soit } [-2\sqrt{h_p}]_{h_0}^0=\sqrt{\frac{2g}{\frac{R_1^4}{R_2^4}-1}}t_f \text{ donc } t_f=\sqrt{\frac{2h_0}{g}(\frac{R_1^4}{R_2^4}-1)}.$$

3. On a besoin de 800 g de pâte à gateau pour les 10 moules soit un volume de pâte $V=\frac{m}{\rho}=7,3.10^{-4}\ m^3$. On cherche la hauteur h_0 de pâte correspondante $h_0=\dfrac{V}{\pi R_1^2}=9,3\ cm$.

4. $\dfrac{\frac{\partial v}{\partial t}}{g}=\dfrac{v_1}{gt_f}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{R_1^4}{R_2^4}-1}}\approx\dfrac{R_2^2}{R_1^2}=0,02$: le terme $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ est bien négligeable devant g, on peut donc valider l'hypothèse d'un régime quasi stationnaire.

IV. **Correction: Tube en rotation**

1. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au tube, le référentiel est en rotation autour de l'axe Oz à vitesse angulaire constante, ce référentiel n'est pas galiléen. Dans ce référentiel, une fois le régime permanent établi, le fluide est à l'équilibre.

Une particule fluide de volume $d\tau$ dans $\mathcal{R}'$ est à l'équilibre sous l'action de son poids $\rho d\tau\overrightarrow{g}$, des forces de pression $-\overrightarrow{\text{grad}}Pd\tau$ et de la force d'inertie centrifuge $\rho d\tau\omega^2r\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées cylindriques.

La somme des forces est nulle, on projette:

sur $\overrightarrow{e_r}$: $\rho d\tau\omega^2 r-\dfrac{\partial P}{\partial r}d\tau=0$

sur $\overrightarrow{e_\theta}$: $\dfrac{\partial P}{\partial\theta}=0$ donc P ne dépend pas de θ

sur $\overrightarrow{e_z}$: $-\rho g d\tau - \dfrac{\partial P}{\partial z} d\tau = 0$

soit $\dfrac{\partial P}{\partial r} = rho\omega^2 r$ et $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -rhog$.

2. On intègre par rapport à r à z constant la première relation: $P(r,z) = \dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2} + f(z)$. On dérive cette relation par rapport à z à r constant $\dfrac{\partial P}{\partial z} = f'(z) = -\rho g$ donc $f(z) = -\rho g z + C$.

On a donc $P(r,z) = \dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z + C$.

3. A et B sont en contact avec l'air, ils sont à la pression P_0 soit:

$P_A = P(a, h_A) = \dfrac{\rho\omega^2 a^2}{2} - \rho g h_A + C = P_0$. et $P_B = P(b, h_B) = \dfrac{\rho\omega^2 b^2}{2} - \rho g h_B + C = P_0$.

On en déduit $h_B - h_A = \dfrac{\omega^2(b^2 - a^2)}{2g}$.

Par conservation de la masse: $\rho S(h_B - h_0) = \rho S(h_0 - h_A)$ soit $h_A + h_B = 2h_0$.

On a un système de deux inconnues à deux équations, on peut en déduire h_B et h_A.

Correction : chalutier

Le filet de poisson dans l'eau subit la force de traînée de la forme $F = \dfrac{1}{2}\rho S C_x v^2$ où C_x est le coefficient de traînée et S est la surface projetée soit la surface du filet perpendiculaire à la direction du mouvement du filet dans l'eau (ou mouvement de l'eau par rapport au filet).

Modèle: le filet de poisson est assimilée à une sphère de rayon R soit:

- $S = \pi R^2$: la surface projetée est la surface d'un disque de rayon R
- $Re = \dfrac{\rho v 2R}{\eta}$ ($2R$ est la taille du filet et je prendrai par la suite $R = 2\ m$)

On calcule le nombre de Reynolds: $Re = \dfrac{1025.2.4}{1,23.10^{-3}} = 6,6.10^6$.

Pour ce nombre de Reynolds on lit sur le graphe: $C_x \approx 0,2$ d'où la force de traînée: $F = frac12\rho\imath R^2 C_x v^2 = \dfrac{1}{2}1025.\pi.2^2.0,2.2^2 = 5100\ N$ soit une puissance mécanique pour cette force $P = Fv = 5100.2 = 10\ kW$.

V. Correction : Microfissure dans un réservoir

1. L'écoulement est incompressible on a donc $\mathrm{div}\overrightarrow{v} = \dfrac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \dfrac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{y}} + \dfrac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{z}} = 0$ avec ici $v_x = v_y = 0$ donc $\dfrac{dv_z}{dz} = 0$ soit v_z ne dépend pas de z.

2. L'équation de Navier Stokes s'écrit: $\rho(\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}P + \eta\Delta\overrightarrow{v} + \rho\overrightarrow{g}$

ici on est en régime stationnaire : $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$

avec $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}} = v(x)\dfrac{d}{dz}$ et donc $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\overrightarrow{v} = v(x)\dfrac{d}{dz}(v(x)\overrightarrow{e_z}) = \overrightarrow{0}$

avec $\Delta\overrightarrow{v} = \Delta v(x)\overrightarrow{e_z} = \dfrac{d^2 v}{dx^2}\overrightarrow{e_z}$

En projection sur $\overrightarrow{e_x}$: $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$: donc P ne dépend pas de x.

En projection sur $\overrightarrow{e_z}$: $-\dfrac{dP}{dz} + \eta\dfrac{d^2 v}{dx^2} + \rho g = 0$.

On en déduit que $\dfrac{dP}{dz} - \rho g = \eta\dfrac{d^2 v}{dx^2}$.

3. On a donc $\dfrac{d^2 v}{dx^2} = -\dfrac{\rho g h}{\eta e} - \dfrac{\rho g}{\eta} = -\dfrac{\rho g}{\eta}(1 + \dfrac{h}{e})$. On intègre deux fois par rapport à x: $\eta\dfrac{dv}{dx} = -\rho g(1 +$

$\frac{h}{e})x + B$ puis $v(x) = -\frac{\rho g}{\eta}(1+\frac{h}{e})\frac{x^2}{2} + Bx + C$.

On utilise les conditions aux limites qui correspondent à un fluide visqueux soit sur les parois de la microfissure, le fluide adhère aux parois et donc la vitesse est nulle. On a donc $v(x=b) = 0 = -\frac{\rho g}{\eta}(1+\frac{h}{e})\frac{b^2}{2} + Bb + C$ et $v(x=-b) = 0 = -\frac{\rho g}{\eta}(1+\frac{h}{e})\frac{b^2}{2} - Bb + C$. Ce qui conduit à $B = 0$ et $C = \frac{\rho g}{\eta}(1+\frac{h}{e})\frac{b^2}{2}$ d'où $v(x) = -\frac{\rho g}{2\eta}(1+\frac{h}{e})(x^2-b^2)$.

4. On calcule le débit du fluide à travers une surface perpendiculaire à la vitesse soit ici un rectangle dans le plan Oxy avec x compris entre $-b$ et $+b$ et y compris entre $y=0$ et $y=a$. Un point M sur cette surface est repéré par ses coordonnées x, y donc on a $dS = dxdy$.

Le débit s'écrit $D_v = -\frac{\rho g}{2\eta}(1+\frac{h}{e})\int_{-b}^{+b}(x^2-b^2)dx int_0^a dy = -\frac{\rho g}{2\eta}(1+\frac{h}{e})a\frac{-4b^3}{3} = \frac{2ab^3\rho g}{3\eta}(1+\frac{h}{e})$.

La vitesse moyenne est définie par $D_v = v_{moy}ab$.

On déduit des deux relations précédentes que $v_{moy} = \frac{2b^2\rho g}{3\eta}(1+\frac{h}{e}) = 8,3.10^{-3}\ m.s^{-1}$.

On en déduit le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho V(2b)}{\eta} = \frac{10^3 8,3.10^{-3}10^{-5}}{10^{-3}} = 0,08 << 1$: l'écoulement est laminaire et les effets diffusifs sont importants, on ne pouvait pas négliger la force de viscosité.