Correction TD électricité

I. Correction: source de courant commandée en tension

Millman en $-$: $v^- = \dfrac{R_2 v_e + R_1 v_s}{R_1 + R_2}$ soit $(R_1+R_2)v^- = R_2 v_e + R_1 v_s$

Millman en $+$: $v^+ = v = \dfrac{\frac{v_s}{R_4}}{\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_u}+\frac{1}{R_3}}$ soit $v_s = (1+\dfrac{R_4}{R_u}+\dfrac{R_4}{R_3})v_e$

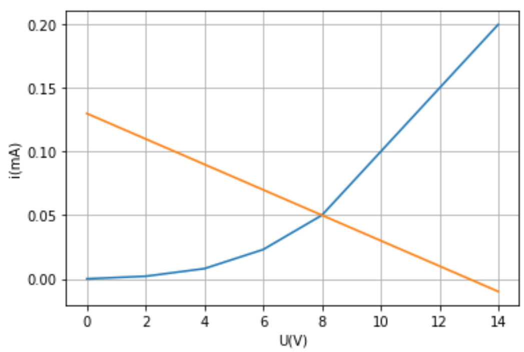
avec $v = v^- = v^+$ donc $(R_1+R_2)v = R_2 v_e + R_1(1+\dfrac{R_4}{R_u}+\dfrac{R_4}{R_3})v_e$ soit $v = \dfrac{R_2 v_e}{R_2 - \frac{R_1R_4}{R_3} - \frac{R_1R_4}{R_u}}$.

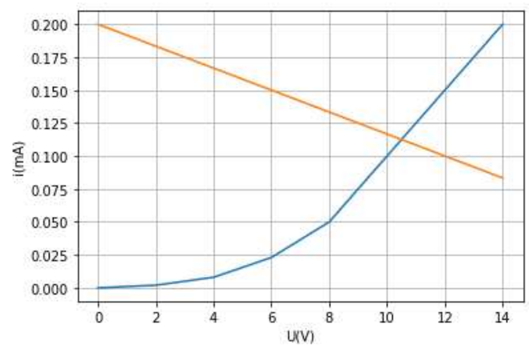
On en déduit i_0 avec $i_0 = \dfrac{v}{R_u} = \dfrac{R_2 v_e}{R_u(R_2 - \frac{R_1R_4}{R_3}) - R_1R_4}$. Pour que i_0 ne dépendent pas de R_u il faut $(R_2 - \dfrac{R_1R_4}{R_3}) = 0$ soit $R_2R_3 = R_1R_4$.

Dans ce cas on a $i_0 = -\dfrac{R_2 v_e}{R_1R_4} = -\dfrac{v_e}{R_3}$: ainsi la tension d'entrée v_e commande le courant de sortie i_0.

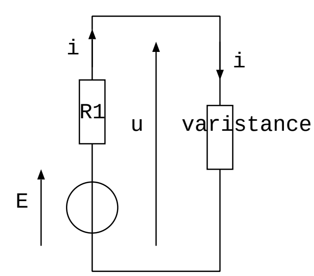
II. Correction: caractéristique

1. La caractéristique de la varistance est le graphe donnant i qui traverse la varistance en fonction de u, la tension à ses bornes: c'est la courbe bleue. Elle passe par l'origine donc le dipole est passif. Le dipôle n'est pas linéaire puisque la carcatéristique n'est pas une droite.

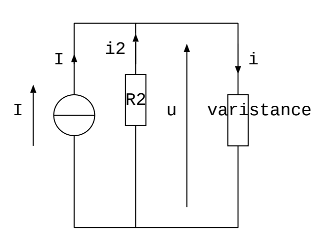




2. On se place en convention récepteur dans la varistance (comme indiqué dans l'énoncé), on a alors $u = E - R_1 i$ soit $i = \dfrac{E-u}{R_1}$: on trace la droite qui correspond à $i = \dfrac{E-u}{R_1} = \dfrac{13-u}{100}$ et on trouve les valeurs de i et u dans le circuit en prenant le point d'intersection entre la droite et la caractéristique de la varistance soit $u = 8\ V$ et $i = 50\ mA$ (attention je me suis trompée dans l'unité de i sur les graphes, i est en Ampère).



3. On se place en convention récepteur dans la varistance (comme indiqué dans l'énoncé), on a alors $i = i_1 + I = I - \frac{u}{R_2} = 0,2 - \frac{u}{120}$: on trace cette droite et on trouve les valeurs de i et u dans le circuit en prenant le point d'intersection entre la droite et la caractéristique de la varistance soit $u = 10,5\ V$ et $i = 112\ mA$ (attention je me suis trompée dans l'unité de i sur les graphes, i est en Ampère).



III. Correction: Mesure d'une inductance

$U_A = Ri$ et $U_B = -L\dfrac{di}{dt}$ soit $U_B = -\dfrac{L}{R}\dfrac{dU_A}{dt}$: la tension U_B est la dérivée de la tension U_A.

On en déduit $L = -\frac{RU_B}{\frac{dU_A}{dt}} = 10\ mH$ avec $U_B = 10\ mV$ pour $\frac{dU_A}{dt} = -\frac{4}{40.10^{-3}} = -100\ V.s^{-1}$.

IV. **Correction: Portrait de phase**

Le portrait de phase est décrit dans le sens horaire. Sur le portrait de phase le point à $t = 0^+$ a pour coordonnées: $U = 3\ V$ et $dU/dt = 0$ et le point pour $t \to \infty$ a pour coordonnées $U = 0$ et $dU/dt = 0$.

A $t = 0^-$: le condensateur est un interrupteur ouvert et la bobine un fil. On a donc $U(t = 0^-) = E$ et $i(t = 0^-) = 0$.

Le courant dans la bobine et la tension dans un condensateur sont continus donc $U(t = 0^+) = E$ et $i(t = 0^+) = 0 = C\frac{dU}{dt}(t = 0^+)$. Sur le portrait de phase le point à $t = 0^+$ a pour coordonnées: $U = E = 3\ V$ et $dU/dt = 0$.

Pour $t > 0$: $U(t)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dU}{dt} + \frac{U}{LC} = \frac{E}{LC}$.

On cherche la solution pour un régime pseudo-périodique soit pour $\Delta = (\frac{R}{L})^2 - \frac{4}{LC} < 0$ soit $r_\pm = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}$. On pose $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}$, la pseudo-pulsation.

On a donc $U(t) = e^{-Rt/2L}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$.

On utilise le décrément logarithmique: $\delta = \ln(\frac{U(t)}{U(t+T)}) = \ln(e^{+RT/2L}) = \frac{RT}{2L} \approx \frac{RT_0}{2L}$. On a $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} = 8\pi.10^{-4}\ s$.

On mesure $\delta = \ln(\frac{3}{1,2}) = 0,92$ et $R = \frac{\delta 2L}{T_0} = 29\ \Omega$.

V. **Correction: résonance en tension**

Filtre passe-bas: BF: bobine est un fil et le condensateur est un interrupteur ouvert: $U_c = e$ et HF: le condensateur est un fil et la bobine est un interrupteur ouvert: $U_c = 0$

Diviseur de tension: $\underline{u}_c = \frac{e}{1 + jL\omega(\frac{1}{R} + jC\omega)} = \frac{e}{1 - LC\omega^2 + \frac{jL\omega}{R}} = \frac{e}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$.

On en déduit l'amplitude de $u_c(t)$: $U_c = |\underline{u_c}| = \frac{e}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{\omega}{Q\omega_0})^2}}$. Il y a résonance en tension lorsque le dénominateur est minimal, on cherche ce minimum en dérivant le dénominateur.

On pose $f(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

soit $f'(x) = -4x(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 2x(-2+2x^2+\frac{1}{Q^2}) = 0$ pour $x = 0$ et $x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$.

Pour $Q = 0,4$: pas de résonance en tension

Pour Q_2 et Q_3, il y a résonance en tension et la tension à résonance est d'autant plus grande que Q est grand.

On lit $E = 3\ V$, $f_0 \approx 2\ kHz$ et $Q_3 \approx \frac{U_{cmax}}{E} = \frac{12}{3} = 4$ (en effet à résonance $\omega \approx \omega_0$ et $\underline{u_c} = -jEQ$.

VI. **Correction: équilibre d'un pont**

Diviseur de tension: $U_2 = \frac{Z_2 e}{Z_2 + Z_3}$ et $U_1 = \frac{Z_1 e}{Z_1 + Z_4}$.

On a $U_{AB} = -U_2 + U_1 = \frac{Z_1Z_3 - Z_2Z_4}{(Z_2 + Z_3)(Z_1 + Z_4)}e$

A l'équilibre $Z_1Z_3 = Z_2Z_4$

On a $Z1 = (1-k)R$, $Z_2 = R + \frac{1}{jC\omega}$, $Z_3 = \frac{R}{1 + jRC\omega}$ et $Z_4 = kR$.

A l'équilibre $(1-k)R\dfrac{R}{1+jRC\omega} = kR(R+\dfrac{1}{jC\omega})$ donne $(1-3k)R = jk(R^2C\omega-\dfrac{1}{C\omega})$ soit $k=1/3$ et $\omega = \dfrac{1}{RC}$.

VII. **Correction: dipole inconnu**

1. On mesure $U_{1m} = 3\ V$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}02} = 314\ rad.s^{-1}$.

2. $U_{2m} = 1,9\ V$ et $\phi_{2/1} = -\omega\Delta t < 0$ car U_2 est en retard par rapport à U_1 avec $\Delta t = 2\ ms$ soit $\phi \approx -0,63\ rad$.

Un circuit est dit inductif (comme pour une bobine) lorsque le courant est en retard par rapport à la tension (dans une bobine u_L est en avance de $\pi/2$ par rapport à i_L). Ici la tension U_2 aux bornes de R est égale à Ri donc U_2 est proportionnelle à i. U_2 en retard par rapport à U_1 veut dire i en retard par rapport à U_1: circuit inductif.

3. On calcule $\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$, on en prend le module, cela donne le rapport des amplitudes et on en prend l'argument, cela donne le déphasage de U_2 par rapport à U_1.

Diviseur de tension: $\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \dfrac{R}{R+\underline{Z}} = \dfrac{R}{R+X+jY}$.

Module: $\dfrac{U_{2m}}{U_{1m}} = \dfrac{R}{\sqrt{(R+X)^2+Y^2}}$

Argument: $\phi_{2/1} = arg(\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}) = arg(\dfrac{R}{R+X+jY}) = arg(R) - arg(R+X+jY) = 0 - \arctan(\dfrac{Y}{R+X})$ soit $\tan\phi_{2/1} = -\dfrac{Y}{R+X})$

$\dfrac{U_{2m}}{U_{1m}} = \dfrac{R}{\sqrt{(R+X)^2+Y^2}} = \dfrac{R}{\sqrt{(R+X)^2+(R+X)^2\tan^2\phi_{2/1}}} = \dfrac{R\cos\phi_{2/1}}{(R+X)}$, on en déduit $R+X = \dfrac{R\cos\phi_{2/1}U_{1m}}{U_{2m}} = 190\ \Omega$ donc $X = 40\ \Omega$.

Et on en déduit $Y = -(R+X)\tan\phi_{2/1} = 140\ \Omega$.

VIII. **Correction: Filtre**

1. On décompose $U_e(t)$ en trois tensions de fréquences différentes: $U_1(t) = 3$ de fréquence $f_1 = 0\ Hz$, $U_2(t) = 2\sin(2\pi 800t)$ de fréquence $f_2 = 800\ Hz$ et $U_3(t) = 4\sin(2\pi 8000t)$ de fréquence $f_3 = 8000\ Hz$. Je note U_{s1}, U_{s2} et U_{s3}, les tensions de sortie associées à ces trois tensions d'entrée.

Le filtre est un filtre passe bande donc il coupe les basses fréquences donc $U_{s1} = 0$

Sur les diagrammes de Bode on lit ϕ et G_{dB} pour les fréquences f_2 et f_3. On en déduit $G = 10^{G_{dB}/20}$.

Pour $f_2 = 800\ Hz$: $\phi = 0,8\ rad$ et $G_{dB} = -13\ dB$ soit $G = 10^{-13/20} = 0,22$ et $U_{s2} = 2.0,22\sin(2\pi 800t+0,8)$

Pour $f_3 = 8000\ Hz$: $\phi = -0,75\ rad$ et $G_{dB} = -10\ dB$ soit $G = 10^{-10/20} = 0,32$ et $U_{s3} = 4.0,32\sin(2\pi 8000t-0,75)$

La tension de sortie s'écrit $U_s(t) = U_{s1} + U_{s2} + U_{s3}$ car le filtre est linéaire.

2. Pour chaque fonction de transfert proposé, on étudie sa limite aux BF et HF pour déterminer la nature du filtre.

Pour $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1+jQ(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f})}$:

A BF et à HF: $\underline{H} = 0$: le filtre coupe les BF et les HF, c'est un filtre passe bande.

Pour $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1+jQ\frac{f}{f_0}-(\frac{f}{f_0})^2}$:

A BF: $\underline{H} = H_0$: le filtre laisse passer les BF

A HF: $\underline{H} = 0$: le filtre coupe les HF

Ce filtre est un filtre passe bas.

Pour $\underline{H} = H_0 \dfrac{j\frac{f}{f_0}}{1+j\frac{f}{f_0}}$

A BF: $\underline{H} = 0$: le filtre coupe les BF

A HF: $\underline{H} = H_0$: le filtre laisse passer les HF

Ce filtre est un filtre passe haut.

Le filtre étudié est un passe bande de fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1+jQ(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f})}$.

f_0 désigne la fréquence de résonance (fréquence du maximum) et pour $f = f_0$, $\underline{H} = H_0$. On lit $f_0 = 3\ kHz$ et $g_{dB}(3\ kHz) = -9\ dB$ soit $H_0 = G(3\ kHz) = 10^{-9/20} = 0,35$.

On trouve Q en utilisant la bande passante. On a $Q = \dfrac{f_0}{\Delta f}$. On trouve les fréquences de coupure en cherchant les fréquences pour lesquelles $G_{dB} = G_{dBmax} - 3\ dB$. Ici $G_{dB} = -9-3 = -12$ pour $f = 1000\ Hz$ et $f' = 9000\ Hz$. On a donc $Q = \dfrac{3000}{9000-1000} \approx 0,4$.

3. A HF la fonction de transfert est $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1+jQ(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f})} \approx \dfrac{H_0}{jQ\frac{f}{f_0}} \approx \dfrac{H_0}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}} = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$ soit $\underline{U}_s = \dfrac{H_0}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}\underline{U}_e$ soit en notation réelle $U_s = \dfrac{H_0\omega_0}{Q}\displaystyle\int U_e(t)dt$ (la division par $j\omega$ en complexe est équivalente à l'intégrale en réelle).

IX. Correction: détecteur de métaux

1. $v_L(t) = ri + L\dfrac{di}{dt} + M\dfrac{di_m}{dt}$ et $v_m = 0 = L_m\dfrac{di_m}{dt} + M\dfrac{di}{dt}$ soit $\dfrac{di_m}{dt} = -\dfrac{M}{L_m}\dfrac{di}{dt}$.

On a donc $v_L(t) = ri + L\dfrac{di}{dt} - \dfrac{M^2}{L_m}\dfrac{di}{dt} = ri + L'\dfrac{di}{dt}$ avec $L' = L(1-\dfrac{M^2}{LL_m})$.

2. $f_d - f_r = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}((1-\dfrac{M^2}{LL_m})^{-1/2} - 1) \approx f_r\dfrac{M^2}{2LL_m}$.

3. Après le multiplieur on a $v(t) = \dfrac{v_{r0}v_{d0}}{2}(\cos(2\pi(f_d-f_r)t) + \cos(2\pi(f_d+f_r)t))$.

On veut conserver la composante de fréquence $f_d - f_r$, il faut utiliser un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est comprise entre $f_d - f_r$ et $f_r + f_d \approx 2f_r$. Filtre RLC aux bornes de C.

4. $6T = 40\ ms$ soit $f = \dfrac{1}{T} = 150\ Hz$. L'enveloppe du signal est la composante à BF soit $f_d - f_r = 150\ Hz$ et $f_d + f_r = 2f_r + 150$