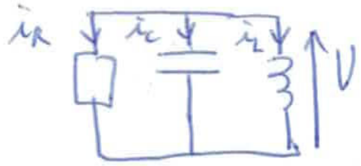
Exo IV) Régime libre d'un circuit RLC parallèle

1) L'énergie dans le condensateur s'écrit $E_C = \frac{1}{2}CU^2$, elle est continue donc la tension aux bornes du condensateur est continue.
L'énergie dans la bobine s'écrit $E_L = \frac{1}{2}Li^2$, elle est continue donc l'intensité dans la bobine est continue.

à $t = 0^+$



loi des noeuds :

$$0 = U/R = i_R + i_C + i_L = 0, \quad i_L = -I_0$$

loi des dipôles :

$$U = R\,i_R = 0 \qquad U = L\frac{di_L}{dt} = 0 \qquad i_C = C\frac{dU}{dt}$$

d'où $i_C = I_0 = C\frac{dU}{dt}$ soit $\boxed{\frac{dU}{dt}(0^+) = \frac{I_0}{C}}$

---

2) On reprend les lois précédentes à t quelconque :

$$i_R + i_C + i_L = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{di_R}{dt} + \frac{di_C}{dt} + \frac{di_L}{dt} = 0$$

avec $u = Ri_R = L\frac{di_L}{dt}$

et $i_C = C\frac{du}{dt}$

soit $\frac{1}{R}\frac{du}{dt} + C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{u}{L} = 0$

d'où $\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0}$

par identification avec l'énoncé : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$

$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$

---

3) On observe un régime pseudo-périodique.
On écrit l'éq. caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0$ pour un régime pseudo-périodique

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}}$$

solution : $u(t) = e^{-\omega_0 t/2Q}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}}$

On trouve A et B avec les conditions initiales.

$$u(0) = \boxed{0 = A}$$

$$\frac{du}{dt}(t) = -\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\omega_0 t/2Q} B \sin(\omega t) + B e^{-\omega_0 t/2Q} \omega \cos(\omega t)$$

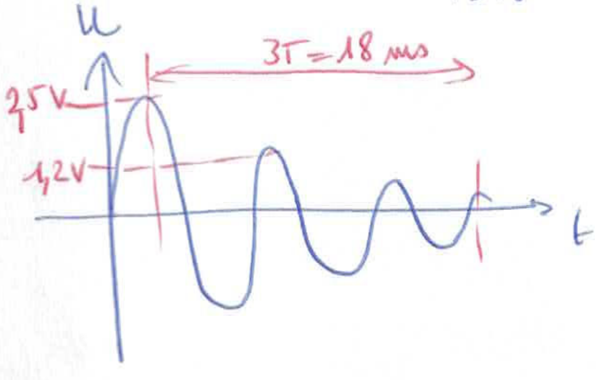
$$\frac{du}{dt}(t=0^+) = B\omega = \frac{I_0}{C} \quad \text{d'où} \quad \boxed{B = \frac{I_0}{C\omega}}$$

soit $\boxed{u(t) = \frac{I_0}{C\omega} e^{-\omega_0 t/2Q} \sin(\omega t)}$ ou $\boxed{\frac{I_0}{C\omega} e^{-t/\tau} \sin(\omega t)}$

avec $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$ et $\boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

$$\delta = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{\frac{I_0}{C\omega}} e^{-t/\tau} \sin(\omega t)}{\cancel{\frac{I_0}{C\omega}} e^{-(t+T)/\tau} \underbrace{\sin(\omega t + \omega T)}_{= \sin(\omega t)}}\right) = \ln\left(e^{+T/\tau}\right) = \frac{T}{\tau}$$

soit $\boxed{\delta = \frac{T\omega_0}{2Q} \underset{T \simeq T_0}{\simeq} \frac{T_0 \omega_0}{2Q} \underset{\omega_0 T_0 = 2\pi}{=} \frac{\pi}{Q}}$



$$\delta = \ln\left(\frac{2,5}{1,2}\right) = 0,7$$

or $\delta = \frac{\pi}{Q}$ donc $\boxed{Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{0,7} = 4,5}$

$T \simeq \boxed{6 \text{ ms} \simeq T_0}$ et $\underline{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1.10^3 \text{ rad s}^{-1}}$

or $\frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \underline{C} = \frac{Q}{R\omega_0} = \frac{4,5}{160 \times 10^3} = \underline{2,8.10^{-5} \text{ F}}$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \underline{L} = \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{1}{2,8.10^{-5} (10^3)^2} = \underline{36 \text{ mH}}$

Exo XIII Spectres

Le signal U(t) a pour période T telle que : 3T = 1 ms

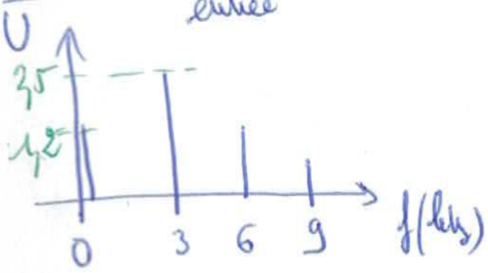
soit T = 0,33 ms et $f = 1/T = 3{,}0$ kHz : fréquence du fondamental

U(t) a une valeur moyenne non nulle donc son spectre présente un pic à 0 Hz (⚠ la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est $U_{moy} = \frac{U_{max} + U_{min}}{2}$ ici on ne peut pas calculer la valeur moyenne à partir de la courbe car le signal n'est pas sinusoïdal, on pourrait calculer la valeur moyenne si l'on connaissait l'expression de U(t) en faisant : $U_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)\,dt$)

Le signal n'est pas sinusoïdal donc il présente des harmoniques.

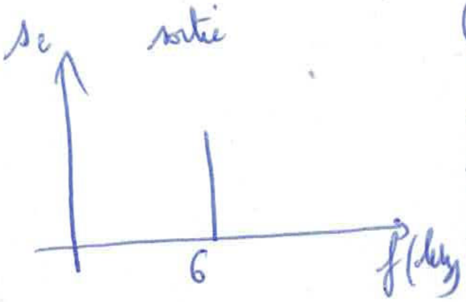
C'est le spectre 2

Filtre 1 :



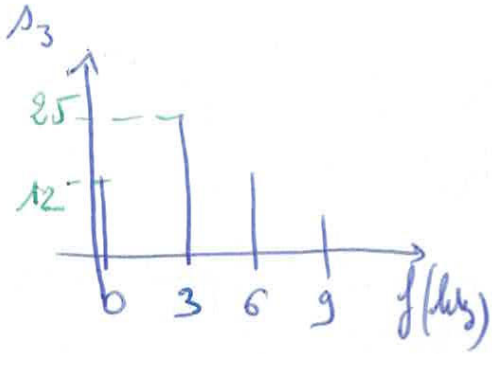
Ce filtre a coupé la composante à 0 Hz et a laissé passer les composantes à 3 kHz, 6 kHz et 9 kHz : c'est un filtre passe haut dont la fréquence de coupure est inférieure à 3 kHz

Filtre 2 :



Ce filtre a coupé les basses et hautes fréquences, c'est un filtre passe bande de fréquence de résonance voisine de 6 kHz et ses fréquences de coupure sont supérieure à 3 kHz et inférieure à 9 kHz.

Filtre 3



Ce filtre a laissé passer toutes les fréquences, il a multiplié les composantes par 10 : filtre amplificateur