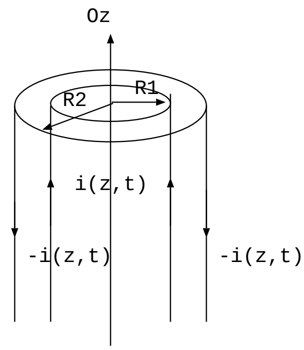
Révisions d'électromagnétisme

I. **Câble coaxial**



Un câble coaxial est constitué de deux cylindres métalliques d'axe Oz, de rayons R_1 et R_2. Entre les deux conducteurs, on considère que le milieu a les propriétés électromagnétiques du vide. Les cylindres sont parcourus par des courants répartis de façon uniforme et en sens inverse l'un de l'autre : $i(z,t) = I_0 \cos(\omega t - kz)$. Il existe alors dans tout l'espace un champ électromagnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ et $\overrightarrow{E}(M,t)$.

1. Déduire des symétries et des invariances les variables et la direction du champ magnétique.

2. Pour cette question, on se placera dans l'ARQS. Rappeler en quoi consiste cette approximation. En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique dans les trois régions de l'espace.

3. On admet que le champ électrique est de la forme $\overrightarrow{E}(M,t) = E(r,z,t)\overrightarrow{e_r}$.

En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, trouver une relation entre $\dfrac{\partial B}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial E}{\partial z}$. En déduire l'expression de $\overrightarrow{E}(M,t)$.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$$

4. Donner sans calcul la relation de dispersion $k(\omega)$ dans le vide.

5. Déterminer le vecteur de Poynting. Commenter. Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers une section droite du câble. Que représente ce flux?

Réponses: 2- Pour $R_1 < r < R_2$: $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$ *et* $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ *pour* $r < R_1$ *et* $r > R_2$ *3-* $E = \dfrac{\mu_0 \omega I_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi k r}$ *pour* $R_1 < r < R_2$ *4-* $\phi = \dfrac{\mu_0 \omega^2 I_0^2 \cos^2(\omega t - kz)}{2\pi k}\ln(\dfrac{R_2}{R_1})$.

II. **Absorption dans un milieu conducteur**

Un faisceau lumineux monochromatique, dont le champ électrique est donné par $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 \overrightarrow{e_y} e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ en notation complexe, traverse un milieu matériel homogène localement neutre, dont la conductivité électrique est γ. La célérité de la lumière dans le vide est notée c.

1. Ecrire l'équation de propagation du champ électrique dans le milieu et en déduire la relation de dispersion donnant $\underline{k}^2$ en fonction de γ, μ_0, c et ω.

2. Dans le cas où $\gamma << \epsilon_0 \omega$, exprimer le vecteur d'onde sous la forme $\underline{k} = k_r - ik_i$ où k_r et k_i sont des réels positifs.

3. Exprimer le champ électrique en notation réelle, la vitesse de phase et l'épaisseur de peau. Y a-t-il propagation? dispersion? absorption?

Réponses: 1- $\Delta \underline{\overrightarrow{E}} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} - \mu_0 \gamma \dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$ *et* $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}(1 - i\dfrac{\gamma}{\epsilon_0 \omega})$ *2-* $\underline{k} = \dfrac{\omega}{c}(1 - i\dfrac{\gamma}{2\epsilon_0 \omega})$ *4-* $\alpha = \dfrac{1}{2k_i}$

III. **Puissance d'un laser**

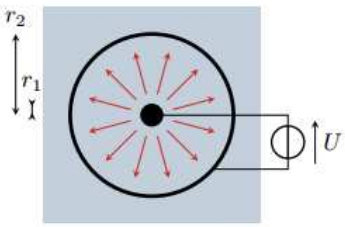
1. Donner l'écriture complexe du champ électrique d'une OPPH polarisée rectilignement.

2. Ecrire les équations de Maxwell pour cette onde se propageant dans le vide et en déduire l'expression du champ magnétique et que l'onde est transverse.

3. L'onde est celle d'un laser polarisée rectilignement selon Oy se propageant selon Ox. Le faisceau a pour diamètre $d = 2\ mm$, pour puissance $P = 1\ mW$, pour longueur d'onde $\lambda = 633\ nm$. Déterminer numériquement l'amplitude du champ électrique. Donnée: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ SI$.

Réponses: 3- $E_0 = \sqrt{\dfrac{2\mu_0 c P}{\pi R^2}} = 490\ V/m$.

IV. **Electrolyseur (conduction électrique)**



L'électrode de travail et la contre-électrode d'un électrolyseur sont constituées de deux cylindres coaxiaux de rayons $r_1 < r_2$ plongeant sur une hauteur h dans une solution électrolytique de conductivité σ supposée uniforme et constante. Une tension $U = V(r_1) - V(r_2) > 0$ est imposée entre les deux électrodes. On suppose le régime stationnaire atteint. La densité de courant dans la solution s'écrit alors sous la forme

$$\vec{j} = j(r)\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad j(r) > 0\,.$$

1 - En procédant à un bilan de charge sur une couche cylindrique comprise entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ ($r_1 < r < r + \mathrm{d}r < r_2$), montrer que l'intensité I qui traverse un cylindre de rayon r ne dépend pas de r.

2 - En déduire l'expression de $j(r)$ en fonction de I, r et h, puis celle du champ électrique $\vec{E}$ au sein de la solution électrolytique.

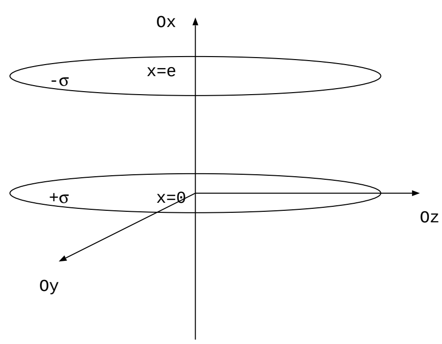
3 - Établir l'expression de la résistance R de la portion de solution comprise entre les deux électrodes.

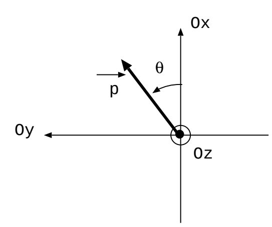
4 - Déterminer la puissance totale dissipée par effet Joule dans la solution en fonction du courant I d'électrolyse.

Réponses: $R = \dfrac{1}{2\pi h\sigma}\ln(\dfrac{r_2}{r_1})$

V. **Dipôle électrique**

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques très fines, de surface S, situées en $x = 0$ et $x = e$. L'isolant entre les deux armatures a une permittivité ϵ_0. On néglige les effets de bord. Les densités surfaciques de charges portées par les deux armatures sont uniformes et opposées, notées $+\sigma$ pour l'armature en $x = 0$ et $-\sigma$ pour l'armature en $x = e$. On rappelle que pour un dipôle électrique rigide de moment dipolaire $\vec{p}$ placé dans un champ électrique extérieur $\vec{E}$, l'énergie potentielle du dipôle s'écrit $E_p = -\vec{p}.\vec{E}$ et le moment du couple subi par le dipôle s'écrit $\vec{\Gamma} = \vec{p}\Lambda\vec{E}$.





1. Démontrer l'expression du champ électrique créé dans tout l'espace par l'armature de charge surfacique $+\sigma$ placée en $x = 0$.

1.a. En déduire le champ électrostatique à l'intérieur du condensateur.

1.b. On place à l'intérieur du condensateur un dipôle électrostatique de moment d'inertie J en un point O d'abscisse $x = e/2$. Il peut tourner autour de l'axe Oz grâce à une liaison pivot parfaite.

2. Déterminer les positions d'équilibre et préciser la stabilité de ces positions.

3. Etablir l'équation différentielle en θ liée à la rotation du dipôle autour de l'axe Oz. Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable. Justifier que le centre de masse du dipôle électrostatique ne se déplace pas dans le condensateur.

Réponses: 2- $\vec{E} = 2\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e_x} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e_x}$ *3-* $\theta = 0$ *stable,* $\theta = \pi$ *instable,* $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{p\sigma}{J\epsilon_0}}$

VI. **Correction Câble coaxial**

1. Il y a invariance par rotation autour de Oz donc B ne dépend pas de θ. Attention ici le courant dépend de z donc il n'y a pas invariance par rapport à z.

Le plan $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z}$ est P^+ donc le champ magnétique en M est perpendiculaire à ce plan, il est selon $\overrightarrow{e_\theta}$.

On a donc $\overrightarrow{B} = B(r,z,t)\overrightarrow{e_\theta}$.

Les lignes de champ magnétique sont des cercles centrés sur Oz on prend pour contour d'Ampère un cercle de rayon r centré sur Oz et orienté par $\overrightarrow{e_z}$.

2. Dans l'ARQS (approximation des courants quasi permanents) on néglige le courant de déplacement devant le courant de conduction. Ainsi l'équation de Maxwell Ampère est la même qu'en régime statique donc le théorème d'Ampère est le même que celui de la magnétostatique: $\oint \overrightarrow{B}(M,t)d\overrightarrow{OM} = \mu_0 I_{enlace}$.

Ici $\oint \overrightarrow{B}(M,t)d\overrightarrow{OM} = B(r,z,t)2\pi r$.

Pour $r < R_1$: $I_{enlace} = 0$ donc $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.

Pour $r > R_2$: $I_{enlace} = +I - I = 0$ donc $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.

Pour $R_1 < r < R_2$: $I_{enlace} = I$ soit $B(r,z,t)2\pi r = \mu_0 I$ d'où $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$.

3. L'équation de Maxwell Faraday s'écrit $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$.

Ici $E_z = E_\theta = 0$ et E_r dépend de r, z et t soit $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = \dfrac{\partial E}{\partial z}\overrightarrow{e_\theta} = -\dfrac{\partial B}{\partial t}\overrightarrow{e_\theta}$ donc $\dfrac{\partial E}{\partial z} = -\dfrac{\partial B}{\partial t} = -\dfrac{\mu_0 \frac{dI}{dt}}{2\pi r} = \dfrac{\mu_0 \omega I_0 \sin(\omega t - kz)}{2\pi r}$. On intègre par rapport à z pour avoir le champ électrique (la constante d'intégration est nulle car les constantes ne se propagent pas).

Soit $E = \dfrac{\mu_0 \omega I_0 \cos(\omega t - kz)}{2\pi k r}$ pour $R_1 < r < R_2$, le champ électrique est nul ailleurs.

4. On en déduit le vecteur de Poynting $\overrightarrow{R} = \dfrac{\overrightarrow{E}\Lambda\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \dfrac{\mu_0\omega^2 I_0^2 \cos^2(\omega t - kz)}{4\pi^2 k r^2}\overrightarrow{e_z}$: l'énergie se propage selon la direction de propagation de l'onde soit Oz.

On calcule le flux du vecteur de Poynting à travers la couronne comprise entre les cercles de rayons R_1 et R_2 soit $\phi = \displaystyle\iint \frac{\mu_0\omega^2 I_0^2 \cos^2(\omega t - kz)}{4\pi^2 k r^2} drrd\theta = \frac{\mu_0\omega^2 I_0^2 \cos^2(\omega t - kz)}{4\pi^2 k}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0\omega^2 I_0^2 \cos^2(\omega t - kz)}{2\pi k}\ln(\frac{R_2}{R_1})$.

Ce flux représente la puissance transportée par l'onde.

VII. **Correction: absorption dans un milieu conducteur**

1. On applique $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\overrightarrow{E}) - \Delta\overrightarrow{E}$

avec les équations de Maxwell: $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0\gamma\overrightarrow{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

$\text{div}\overrightarrow{E} = \text{div}\overrightarrow{B} = 0$ car $\rho = 0$ (milieu localement neutre).

On trouve donc l'équation de propagation $\Delta\underline{\overrightarrow{E}} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} - \mu_0\gamma\dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$

On trouve la relation de dispersion en remplaçant la solution proposée pour le champ électrique dans l'équation de propagation, en notation complexe on trouve: $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega = \dfrac{\omega^2}{c^2}(1 - i\dfrac{\gamma}{\epsilon_0\omega})$.

2. Pour $\gamma << \epsilon_0\omega$ on fait le DL $(1 - i\dfrac{\gamma}{\epsilon_0\omega})^{1/2} \approx 1 - i\dfrac{\gamma}{2\epsilon_0\omega}$ d'où $\underline{k} = \dfrac{\omega}{c}(1 - i\dfrac{\gamma}{2\epsilon_0\omega}) = \dfrac{\omega}{c} - i\dfrac{\gamma}{2\epsilon_0 c}$: le vecteur d'onde comprend une partie réelle donc il y a propagation et une partie imaginaire donc il y a absorption.

On a $k_r = \dfrac{\omega}{c}$ et $k_i = \frac{\gamma}{2\epsilon_0 c}$.

3. On remplace dans l'expression du champ électrique puis on en prend la partie réelle pour avoir le champ électrique en notation réelle soit: $\overrightarrow{\underline{E}} = E_0\overrightarrow{e_y}e^{-k_ix}e^{i(\omega t - k_rx)}$ soit $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{e_y}e^{-k_ix}\cos(\omega t - k_rx)$.

L'onde se propage selon Ox et lorsque x augmente, son amplitude diminue, il y a donc absorption.

La vitesse de phase est $v_\phi = \dfrac{\omega}{k_r} = c$: cette vitesse ne dépend pas de la fréquence donc il n'y a pas dispersion.

L'épaisseur de peau est la distance δ qui apparaît dans l'amplitude de l'onde sous la forme $e^{-x/\delta}$ soit $\delta = \frac{1}{k_i} = \frac{2\epsilon_0 c}{\gamma}$.

VIII. Correction: puissance d'un laser

1. Le champ électrique d'une OPPH polarisée rectilignement en notation complexe est de la forme $\overrightarrow{\underline{E}} = \overrightarrow{E_0}e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM})}$.

2. Les équations de Maxwell dans le vide sont: $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

$\text{div}\overrightarrow{E} = \text{div}\overrightarrow{B} = 0$

En notation complexe, on remplace $\overrightarrow{\text{rot}}$ par $-i\overrightarrow{k}\Lambda$.

On remplace div par $-i\overrightarrow{k}.$

On remplace $\dfrac{\partial}{\partial t}$ par $i\omega$.

Les équations de Maxwell Gauss et Thomson donnent $-i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{B} = -i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{E} = 0$ donc le champ em est perpendiculaire à la direction de propagation, l'onde em est transverse.

L'équation de Maxwell Faraday donne $-i\overrightarrow{k}\Lambda\overrightarrow{\underline{E}} = i\omega\overrightarrow{\underline{B}}$ soit $\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{k}\Lambda\overrightarrow{\underline{E}}}{\omega} = \dfrac{\overrightarrow{u}\Lambda\overrightarrow{\underline{E}}}{c}$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de propagation.

3. L'onde est celle d'un laser polarisée rectilignement selon Oy se propageant selon Ox donc le champ électrique s'écrit $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{e_y}\cos(\omega t - kx)$. On en déduit le champ magnétique $\overrightarrow{B} = frac\overrightarrow{e_x}\Lambda\overrightarrow{\underline{E}}c = \dfrac{E_0}{c}\overrightarrow{e_z}\cos(\omega t - kx)$.

La puissance de l'onde est égale au flux de la moyenne du vecteur de Poynting à travers la section du faisceau.

Le vecteur de Poynting est $\overrightarrow{R} = \dfrac{\overrightarrow{E}\Lambda\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\overrightarrow{e_x}$ (le vecteur de Poynting est dans la direction de propagation de l'onde).

En moyenne on a $\overrightarrow{R} = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}\overrightarrow{e_x}$ d'où la puissance à travers le disque de rayon $R = d/2$: $P = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}\pi R^2$ soit $E_0 = \sqrt{\dfrac{2\mu_0 cP}{\pi R^2}} = 490\ V/m.$

IX. Correction: électrolyseur

1. Soit le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$. En régime stationnaire, le courant entrant dans ce système $I(r) = j(r)2\pi rh$ est égal au courant sortant $I(r+dr) = j(r+dr)2\pi(r+dr)h$. On a donc $I(r) = I(r+dr)$ donc l'intensité $I = j(r)2\pi rh$ ne dépend pas de r.

2. Soit $\overrightarrow{j} = \dfrac{I}{2\pi rh}\overrightarrow{e_r}$. On en déduit le champ électrique en appliquant la loi d'Ohm locale soit $\overrightarrow{E} = \dfrac{\overrightarrow{j}}{\gamma} = \dfrac{I}{2\pi\gamma rh}\overrightarrow{e_r}$.

3. La résistance est définie par $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{V_1 - V_2}{I}$ avec $V_1 - V_2 = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2}\overrightarrow{E}.\overrightarrow{dOM} = \int_{R_1}^{R_2}\dfrac{I}{2\pi\gamma rh}dr = \dfrac{I}{2\pi\gamma h}\ln(\dfrac{R_2}{R_1})$

On a donc $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{1}{2\pi\gamma h}\ln(\dfrac{R_2}{R_1})$: la résistance est d'autant plus grande que la conductivité est faible.

X. **Correction: Dipôle électrique**

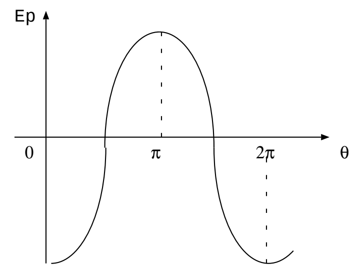
1. Voir le cours pour montrer que pour $x > 0$ on a $\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_x}$ et pour $x < 0$ on a $\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_x}$.

2. L'armature en $x = e$ de charge $-\sigma$ crée le champ électrique $\overrightarrow{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_x}$ pour $x > e$ et le champ électrique $\overrightarrow{E} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_x}$ pour $x < e$.

Ainsi en utilisant le théorème de superposition, le champ électrique total entre les armatures est $\overrightarrow{E} = 2\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{e_x} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{e_x}$.

3.

3.a. On utilise l'expression de l'énergie potentielle $E_p = -\overrightarrow{p}.\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{e_x} = -\dfrac{p\sigma}{\epsilon_0}\cos\theta$. Un maximum d'énergie potentielle correspond à une position d'équilibre instable (en $\theta = \pi$ quand le dipole et le champ électrique sont colinéaires et de sens opposé). Un minimum d'énergie potentielle correspond à une position d'équilibre stable (en $\theta = 0$ quand le dipole et le champ électrique sont colinéaires et de même sens).



3.b. On applique le théorème du moment cinétique du dipôle qui subit le couple $\overrightarrow{\Gamma} = p(\cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y})\Lambda\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{e_x} = -\dfrac{p\sigma}{\epsilon_0}\sin\theta\overrightarrow{e_z}$.

Soit $J\ddot{\theta} = -\dfrac{p\sigma}{\epsilon_0}\sin\theta$

Au voisinage de la position d'équilibre stable on a $\sin\theta \approx \theta$ soit $\ddot{\theta} + \dfrac{p\sigma}{J\epsilon_0}\theta = 0$: on reconnaît un OH de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{p\sigma}{J\epsilon_0}}$ et de période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Dans un champ électrique uniforme la force résultante qui s'éxerce sur le dipole soit $+q\overrightarrow{E} - q\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ donc le centre de masse du dipôle électrostatique ne se déplace pas dans le condensateur.