Les équations différentielles classiques

Comment résoudre une équation différentielle du premier ordre?

Exemple 1: on cherche la fonction $y(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme $\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{\tau} = 0$ où τ est une constante.

Quelle est l'unité de τ ?

La solution s'écrit:

On trouve la constante d'intégration à l'aide de la condition initiale donnée dans l'énoncé: $y(t = 0) = y_0$

Exemple 2: on cherche la fonction $y(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme $\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{\tau} = \frac{y_e}{\tau}$ où y_e et τ sont des constantes.

La solution de cette équation se décompose en:

- une fonction $y_g(t)$ dite solution générale de l'équation sans second membre, soit $y_g(t)$ vérifie l'équation:

- une fonction $y_p(t)$ dite solution particulière : ici le second membre est constant donc la solution particulière est constante, elle vérifie l'équation:

D'où la solution $y(t) = \dots$

On trouve la constante d'intégration en utilisant la condition initiale $y(t = 0) = y_0$ donnée par l'énoncé.

Comment résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique?

Exemple 1: on cherche la fonction $y(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme $\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$ où ω_0 est une constante.

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre: et de période propre

Quelle est l'unité de ω_0 ?

La solution s'écrit:

On trouve les constantes d'intégration avec les conditions initiales $y(t=0) = y_0$ et $\dot{y}(t=0) = v_0$ données par l'énoncé.

Tracé de la fonction pour $y_0 = 0$ et $v_0 > 0$

Tracé de la fonction pour $y_0 > 0$ et $v_0 = 0$

Exemple 2: on cherche la fonction $y(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme $\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 y_e$ où ω_0 et y_e sont des constantes.

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre: et de période propre

La solution de cette équation se décompose en:

- une fonction $y_g(t)$ dite solution générale de l'équation sans second membre, soit $y_g(t)$ vérifie l'équation:

- une fonction $y_p(t)$ dite solution particulière : ici le second membre est constant donc la solution particulière est constante, elle vérifie l'équation:

D'où la solution $y(t) = \dots$

On trouve les constantes d'intégration avec les conditions initiales $y(t = 0) = y_0$ et $\dot{y}(t = 0) = v_0$ données par l'énoncé.

Comment tracer la fonction $y(t)$?

Cas où $y_0 = y_e$ et $v_0 > 0$:

Cas où $v_0 = 0$: