Les équations différentielles classiques

.

Comment résoudre une équation différentielle du premier ordre?

Exemple 1: on cherche la fonction $y(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme $\boxed{\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{\tau} = 0}$ où τ est une constante.

$dy/dt \neq$

Quelle est l'unité de τ?

$[\dot y] = \left[\frac{y}{\tau}\right] = \left[\frac{\cancel{d}y}{\cancel{d}t}\right] = \left[\frac{y}{t}\right]$ donc $[\tau] = [t] = s$

τ s'appelle le temps de relaxation

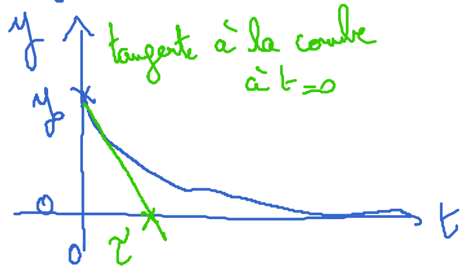
La solution s'écrit: $\boxed{y(t) = A e^{-t/\tau}}$ ♡

On trouve la constante d'intégration à l'aide de la condition initiale donnée dans l'énoncé: $y(t=0) = y_0$

C.I. : $y(t=0) = y_0 = A e^0 = A$ d'où $\boxed{y(t) = y_0 e^{-t/\tau}}$

$y(t \to \infty) \simeq 0$

$y(t=0) = y_0$



Exemple 2: on cherche la fonction $y(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme $\boxed{\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{\tau} = \frac{y_e}{\tau}}$ où y_e et τ sont des constantes.

$dy/dt \neq$ — 2nd membre

La solution de cette équation se décompose en:

- une fonction $y_g(t)$ dite solution générale de l'équation sans second membre, soit $y_g(t)$ vérifie l'équation: $\dot{y}_g + \frac{y_g}{\tau} = 0$

Solution : $y_g(t) = A e^{-t/\tau}$ (A cste d'intégration)

- une fonction $y_p(t)$ dite solution particulière : ici le second membre est constant donc la solution particulière est constante, elle vérifie l'équation:

y_p = cste avec y_p qui vérifie : $\cancel{\dot{y}_p} + \frac{y_p}{\tau} = \frac{y_e}{\tau}$ d'où $y_p = y_e$

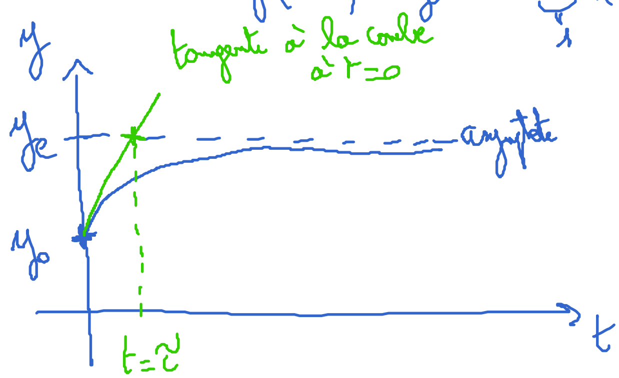
$\frac{dy_p}{dt} = 0$

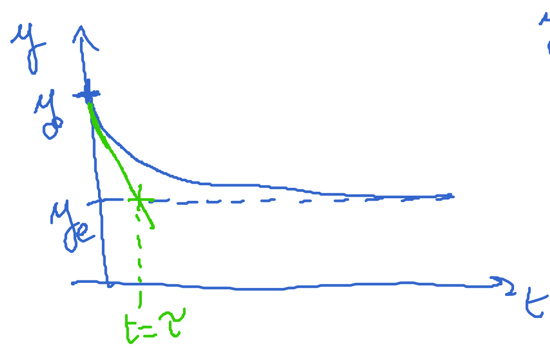
D'où la solution $\boxed{y(t) = y_g(t) + y_p(t) = A e^{-t/\tau} + y_e}$

On trouve la constante d'intégration en utilisant la condition initiale $y(t=0) = y_0$ donnée par l'énoncé.

C.I. : $y(t=0) = y_0 = A \underbrace{e^0}_{1} + y_e$ d'où $A = y_0 - y_e$ $\boxed{y(t) = (y_0 - y_e) e^{-t/\tau} + y_e}$

$y(t \to \infty) = y_e$





Rq: le régime transitoire a une durée de l'ordre de 5τ

Comment résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique? d^2y/dt^2

Exemple 1: on cherche la fonction $y(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme $\boxed{\ddot{y}(t) + \underbrace{\omega_0^2}_{>0} y(t) = 0}$ où ω_0 est une constante.

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre: ω_0 et de période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Quelle est l'unité de ω_0?

$[\ddot{y}] = [\omega_0^2 y] = \left[\frac{d^2 y}{dt^2}\right] = \left[\frac{y}{t^2}\right]$ donc $[\omega_0] = \left[\frac{1}{t}\right] = rad.s^{-1}$

La solution s'écrit: $\boxed{y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$

On trouve les constantes d'intégration avec les conditions initiales $y(t=0) = y_0$ et $\dot{y}(t=0) = v_0$ données par l'énoncé.

C.I.: $y(t=0) = y_0 = A\underbrace{\cos 0}_{1} + B\underbrace{\sin 0}_{0} = A$

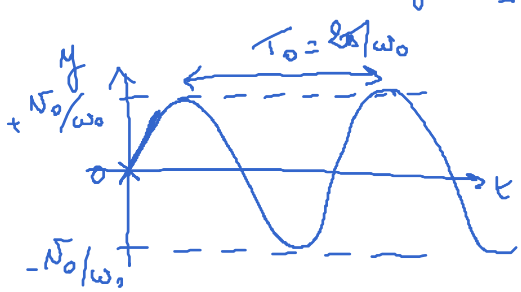
$\dot{y}(t=0) = v_0 = -A\omega_0 \underbrace{\sin 0}_{0} + B\omega_0 \underbrace{\cos 0}_{1} = B\omega_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$

avec $\dot{y}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$\boxed{y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

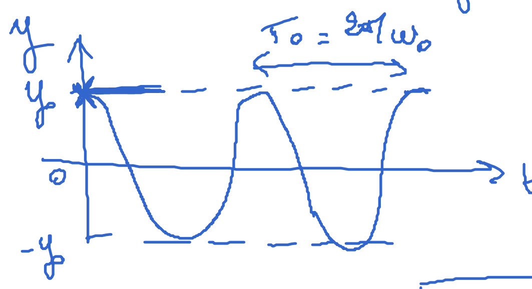
Tracé de la fonction pour $y_0 = 0$ et $v_0 > 0$ $\frac{dy}{dt}(t=0)$

$y(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ $y_{max} = +\frac{v_0}{\omega_0}$ $y_{min} = -\frac{v_0}{\omega_0}$



Tracé de la fonction pour $y_0 > 0$ et $v_0 = 0 = \frac{dy}{dt}(t=0)$

$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t)$ $y_{max} = +y_0$ $y_{min} = -y_0$



Exemple 2: on cherche la fonction $y(t)$ qui vérifie l'équation différentielle de la forme $\boxed{\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 y_e}$ 2nd membre où ω_0 et y_e sont des constantes. d^2y/dt^2

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre: ω_0 et de période propre $T_0 = 2\pi/\omega_0$

La solution de cette équation se décompose en:

- une fonction $y_g(t)$ dite solution générale de l'équation sans second membre, soit $y_g(t)$ vérifie l'équation: $\ddot{y}_g + \omega_0^2 y_g = 0$

Solution : $y_g(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ avec A et B Cstes d'intégration

- une fonction $y_p(t)$ dite solution particulière : ici le second membre est constant donc la solution particulière est constante, elle vérifie l'équation:

$y_p = $ cste

$\ddot{y}_p = \frac{d^2 y_p}{dt^2} = 0$

$\underbrace{\ddot{y}_p}_{0} + \omega_0^2 y_p = \omega_0^2 y_e$ donc $y_p = y_e$

D'où la solution $\boxed{y(t) = y_g(t) + y_p(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + y_e}$

On trouve les constantes d'intégration avec les conditions initiales $y(t=0) = y_0$ et $\dot{y}(t=0) = v_0$ données par l'énoncé.

C.I. : $y(t=0) = y_0 = A\overbrace{\cos 0}^{=1} + B\overbrace{\sin 0}^{=0} + y_e = A + y_e \Rightarrow A = y_0 - y_e$

$\dot{y}(t=0) = v_0 = -A\omega_0 \underbrace{\sin 0}_{0} + B\omega_0 \underbrace{\cos 0}_{=1} = B\omega_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$

avec $\dot{y}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$$y(t) = (y_0 - y_e)\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + y_e$$

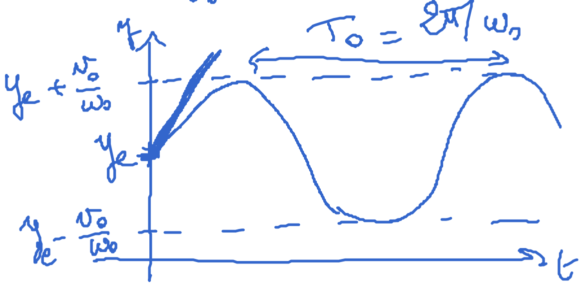
Comment tracer la fonction $y(t)$?

Cas où $y_0 = y_e$ et $v_0 > 0$: $v_0 = \frac{dy}{dt}(t=0)$

$y(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + y_e$ valeur moyenne

$y_{max} = \frac{v_0}{\omega_0} + y_e$

$y_{min} = -\frac{v_0}{\omega_0} + y_e$



Cas où $v_0 = 0$: $\overbrace{\frac{dy}{dt}(t=0)}$ $y(t=0) = y_0$

$y(t) = (y_0 - y_e)\cos(\omega_0 t) + y_e$ valeur moyenne

$y_{max} = y_0 - \cancel{y_e} + \cancel{y_e} = y_0$

$y_{min} = -(y_0 - y_e) + y_e = 2y_e - y_0$