Entraînez-vous

1. La vitesse d'un point matériel vérifie l'équation différentielle $\dot{v} + hv = 0$ où h est une constante positive. Résoudre l'équation différentielle pour $v(t=0) = v_0$. Tracer l'allure de $v(t)$.

$\frac{dv}{dt} + hv = 0$

pas de 2nd membre ⇒ pas de solution particulière

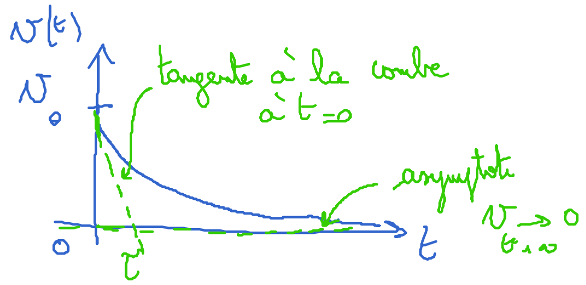
$v(t) = A e^{-ht}$ A cste d'intégration

C.I. : $v(t=0) = v_0 = A$ d'où $\boxed{v(t) = v_0 e^{-ht}}$

Autre façon de faire :
éq. de la forme : $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$
avec $\tau = \frac{1}{h}$: temps de relaxation

$v(t) = A e^{-t/\tau}$

CI : $v(t=0) = v_0 = A$



pour $t \simeq 5\tau$: $v = 0$: valeur limite, valeur à l'équilibre

2. La position $x(t)$ d'un mobile vérifie l'équation différentielle $\dot{x} + \frac{h}{m}x = v_1$ où h et m sont des constantes positives. Résoudre l'équation différentielle pour $x(t=0) = 0$. Tracer l'allure de $x(t)$.

$\frac{dx}{dt} + \frac{h}{m} x = v_1$

$1/\tau$

solution générale : $x_g(t) = A e^{-\frac{h}{m} t}$

" particulière (cste donc $\frac{dx}{dt} = 0$) : $\frac{h}{m} x_p = v_1 \Rightarrow x_p = \frac{m v_1}{h}$

solution : $x(t) = x_g(t) + x_p = A e^{-\frac{ht}{m}} + \frac{m v_1}{h}$

CI : $x(t=0) = 0 = A + \frac{m v_1}{h}$ soit $x(t) = \frac{m v_1}{h}\left(1 - e^{-\frac{ht}{m}}\right)$

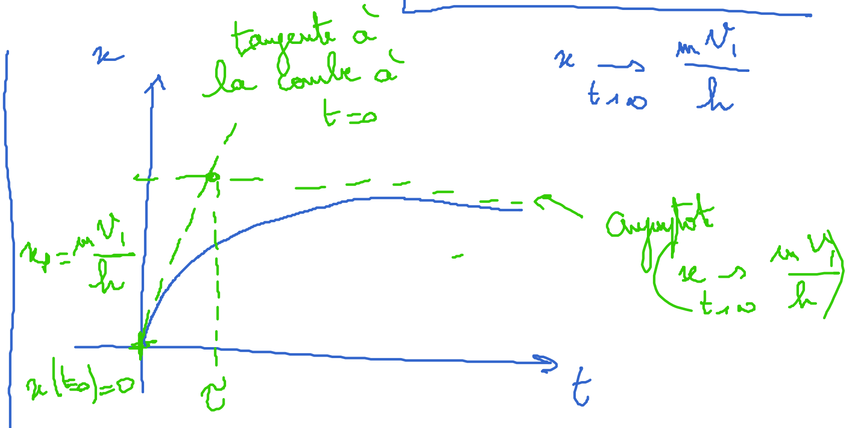
Autre façon :
ép. diff. forme : $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = v_1$
avec $\tau = \frac{m}{h}$: temps de relaxation

$x_g(t) = A e^{-t/\tau}$

$\frac{x_p}{\tau} = v_1 \Rightarrow x_p = v_1 \tau$

$x(t) = A e^{-t/\tau} + v_1 \tau$

CI : $x(t=0) = 0 = A + v_1 \tau$



pour $t \geq 5\tau$: $x = x_p$: solution particulière est égale à la valeur de x à l'équilibre

3. La position $x(t)$ d'un mobile vérifie l'équation différentielle $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$ où k et m sont des constantes positives. Résoudre l'équation différentielle pour $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$. Tracer l'allure de $x(t)$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\boxed{\frac{k}{m}}}_{>0} x = 0 \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

Je reconnais l'éq. d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

solution : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

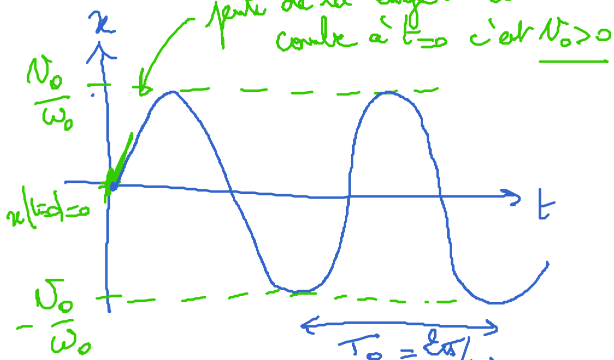
C.I. : $x(t=0) = 0 = A$

$\dot{x}(t=0) = v_0 = B\omega_0 \Rightarrow B = \dfrac{v_0}{\omega_0}$

$\left(\dot{x}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)\right)$

donc $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

$$-\frac{v_0}{\omega_0} \leq x \leq +\frac{v_0}{\omega_0}$$



4. La position $z(t)$ d'un mobile vérifie l'équation différentielle $\ddot{z} + \alpha z = g$ où α est une constant positive. Résoudre l'équation différentielle pour $\underbrace{z(t=0) = 0}_{CI}$ et $\underbrace{\dot{z}(t=0) = 0}_{CI}$. Tracer l'allure de $z(t)$.

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \underbrace{\boxed{\alpha}}_{>0} z = g \qquad \alpha = \omega_0^2$$

Je reconnais l'éq. d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\alpha}$

solution générale : $z_g(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

solution particulière : $\alpha z_p = g \Rightarrow z_p = \dfrac{g}{\alpha}$

$\left(\text{Cste.} \ \dfrac{d^2 z_p}{dt^2} = 0\right)$

d'où : $z(t) = z_g(t) + z_p = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \dfrac{g}{\alpha}$

C.I. : $z(t=0) = 0 = A + g/\alpha \Rightarrow A = -g/\alpha$

$\dot{z}(t=0) = 0 = B\omega_0 \Rightarrow B = 0$

$\left(\dot{z}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) + 0\right)$

donc $\boxed{z(t) = -g/\alpha \cos(\omega_0 t) + g/\alpha}$

$$0 \leq z \leq 2g/\alpha$$

$(\cos(\,) = +1) \qquad (\cos(\,) = -1)$