Révisions de mécanique : la cinématique

La cinématique est l'étude de la description du mouvement d'un point matériel M sans évoquer les forces qui s'exercent sur ce point. $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}(M)_R$, $\vec{a}(M)_R$

On limite l'étude ici aux coordonnées cartésiennes (utilisées pour un mouvement rectiligne) et aux coordonnées polaires (utilisées pour un mouvement plan et en particulier ici pour un mouvement circulaire).

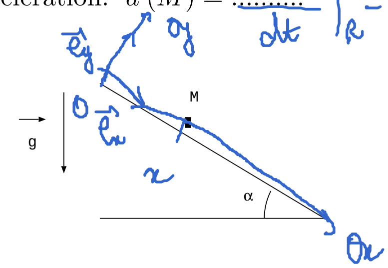
Coordonnées cartésiennes: Soit un point matériel repéré par ses coordonnés cartésiennes (x, y, z) où x, y et z dépendent du temps. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

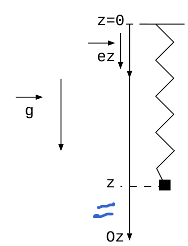
Vecteur position: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ base : $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ (vecteurs fixes)

Vecteur vitesse: $\vec{v}(M) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y} + \dot{z}\,\vec{e_z}$ $\left(\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}\right)$

Vecteur accélération: $\vec{a}(M) = \left.\dfrac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_R = \left.\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \ddot{y}\,\vec{e_y} + \ddot{z}\,\vec{e_z}$ $\left(\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)$

Mvt rectiligne





$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e_x}$ $\vec{v}(M)_R = \dot{x}\,\vec{e_x}$ $\vec{a}(M)_R = \ddot{x}\,\vec{e_x}$

$\overrightarrow{OM} = z\,\vec{e_z}$

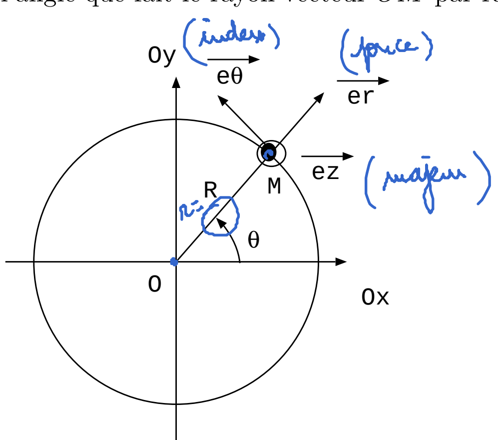
$\vec{v}(M)_R = \dot{z}\,\vec{e_z}$

$\vec{a}(M)_R = \ddot{z}\,\vec{e_z}$

.

Coordonnées polaires: Soit un point matériel M qui décrit un cercle de centre O et rayon R. On note θ l'angle que fait le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à Ox. On note la base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$. $\theta(t)$

$\odot\ \vec{e_z}$ vers nous



$\vec{e_r}(t)$, $\vec{e_\theta}(t)$

$\dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ et $\dfrac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e_r}$

Vecteur position: $\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e_r}$

Vecteur vitesse: $\vec{v}(M) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = R\dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

Vecteur accélération: $\vec{a}(M) = \left.\dfrac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_R = R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + R\dot{\theta}\dfrac{d\vec{e_\theta}}{dt}$

$\vec{a}(M) = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

Moment cinétique: $\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)$

$\vec{L}_O(M) = R\vec{e_r} \wedge mR\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = mR^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}$

$\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} = \vec{e_z}$

Très important: pour la RFD pour un mouvement circulaire: on a $\boxed{\vec{a}(M) = -\dfrac{v^2}{R}\vec{e_r} + \dfrac{dv}{dt}\vec{e_\theta}}$ avec $\boxed{v = R\dot{\theta}.}$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$v = R\dot{\theta}$ $\dfrac{dv}{dt} = R\ddot{\theta}$

$\vec{a}(M) = -\underbrace{R\dot{\theta}^2}_{\left(\frac{v}{R}\right)^2}\vec{e_r} + \underbrace{R\ddot{\theta}}_{\frac{dv}{dt}}\vec{e_\theta}$