Révisions de mécanique : énergie

L'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un point matériel s'écrit: $E_m(M)_R = E_c(M) + E_p(M) = \frac{1}{2} m v^2(M)_R + E_p(M)$

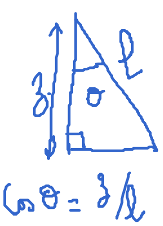
mvt rectiligne : $v = \dot{x}$ mvt circulaire : $v = R\dot{\theta}$ (R le rayon du cercle)

où il y a autant de termes dans l'énergie potentielle que ce qu'il y a de forces conservatives qui s'exercent sur M.

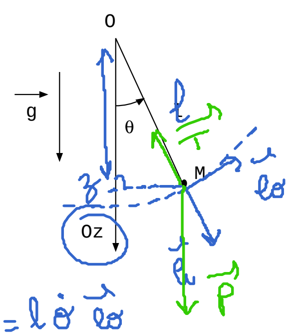
Vous devez savoir que:

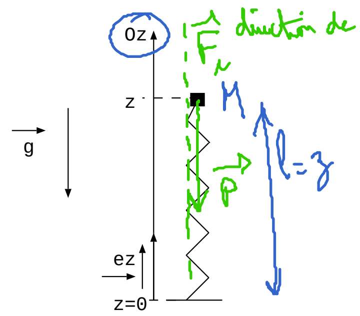
- le poids est une force conservative dont l'énergie potentielle s'écrit $\boxed{E_{pp} = +mgz}$ si Oz est vertical ascendant et $\boxed{E_{pp} = -mgz}$ si Oz est vertical descendant (l'E_{pp} ↗ quand on monte)
- la force de rappel élastique est une force conservative dont l'énergie potentielle s'écrit $\boxed{E_{pr} = \frac{k}{2}(l - l_0)^2}$ avec l longueur du ressort et l_0 longueur à vide du ressort donnée par l'énoncé

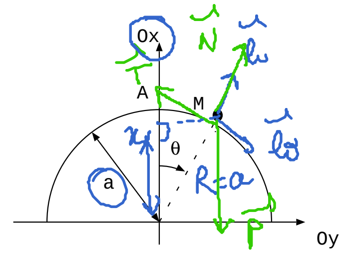
Dans les exemples qui suivent donner l'expression de l'énergie mécanique du point M de masse m.



$\cos\theta = z/l$







on tient compte des frottements

$\cos\theta = \frac{x}{a}$

$\vec{v}(M)_R = l\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$E_c(M)_R = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2$

$\vec{T}$ ne travaille pas

$\vec{P}$ est conservatif

$E_{pp} = -mgz = -mgl\cos\theta$

$E_m(M) = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl\cos\theta$

$\vec{v}(M)_R = \dot{z}\,\vec{e_z}$

$E_c(M)_R = \frac{1}{2} m \dot{z}^2$

$\vec{P}$ et $\vec{F_r}$ sont conservatives

$E_p = +mgz + \frac{k}{2}(\underbrace{l}_{z} - l_0)^2$

$E_m(M) = \frac{m\dot{z}^2}{2} + mgz + \frac{k}{2}(z - l_0)^2$

$\vec{v}(M)_R = a\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$E_c(M)_R = \frac{m}{2} a^2 \dot{\theta}^2$

$\vec{N}$ ne travaille pas ($\perp$ au mvt)

$\vec{F}$ n'est pas conservative

$\vec{P}$ conservatif

$E_{pp}(M) = +mgx = mga\cos\theta$

$E_m(M) = \frac{m}{2} a^2 \dot{\theta}^2 + mga\cos\theta$

Il existe plusieurs formulations pour les théorèmes énergétiques, je vais commencer dans ce rappel avec la forme la plus utile, à savoir le théorème de la puissance mécanique.

Théorème de la puissance mécanique

La dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps dans un référentiel galiléen est égale à la puissance des forces non conservatives qui s'exercent sur le système soit $\left.\frac{dE_m}{dt}\right)_R = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{non conservatives}})$

La puissance d'une force $\vec{F}$ exercée sur M s'écrit: $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_R$

Dans les forces non conservatives, vous trouverez:

- des forces qui sont perpendiculaires au mouvement (comme la tension du fil dans le pendule et la réaction normale au support), et dont la puissance est ....nulle.... (on dit que la force ne travaille pas)
- toutes les forces de frottements dont la puissance est négative

sont opposées au mvt

Ce théorème sert:

- à trouver l'équation différentielle vérifiée par la variable qui caractérise le mouvement de M (voir exemples 3 et 5)

- à montrer que l'énergie mécanique d'un système conservatif est ....constante........ Un système conservatif ne subit que des forces conservatives et des forces perpendiculaires au mouvement

Quand on a montré que l'énergie mécanique est constante, on utilise la conservation de l'énergie mécanique pour exprimer une vitesse ou une position à un instant t connaissant la position et la vitesse initiale (voir exemples 1,2 et 4).

A savoir faire: $(u^2)' = 2uu'$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{z}^2}{2}\right) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{z}^2\right) = \frac{m}{\cancel{2}}\cancel{2}\dot{z}\ddot{z} = m\dot{z}\ddot{z}$$

$u = \dot{z}$ $\quad u' = \ddot{z}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}\right) = \frac{ml^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}^2\right) = \frac{ml^2}{\cancel{2}}\cancel{2}\dot{\theta}\ddot{\theta} = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$u = \dot{\theta}$ $\quad u' = \ddot{\theta}$

$$\frac{d}{dt}(mgz) = mg\frac{dz}{dt} = mg\dot{z}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{k}{2}(x-l_0)^2\right) = \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left((x-l_0)^2\right) = \frac{k}{\cancel{2}}\cancel{2}(x-l_0)\dot{x} = k\dot{x}(x-l_0)$$

$u = x - l_0$ $\quad u' = \dot{x}$

Tous les théorèmes énergétiques $\quad \mathcal{R}$ galiléen

Théorème de l'énergie cinétique:

$$\underset{A\to B}{\Delta E_c(M)_{/\mathcal{R}}} = \underbrace{\underset{A\to B}{W}(\vec{F}_{\text{conservatives}})}_{= -\Delta E_p(M)} + \underset{A\to B}{W}(\vec{F}_{\text{non conservatives}})$$

Théorème de l'énergie mécanique:

$$\underset{A\to B}{\Delta E_m(M)_{/R}} = \underset{A\to B}{W}(\vec{F}_{\text{non conservatives}})$$

Théorème de la puissance cinétique:

$$\frac{d}{dt}\left(E_c(M)_{/R}\right) = \underbrace{P(\vec{F}_{\text{conservatives}})}_{= -\frac{dE_p}{dt}} + P(\vec{F}_{\text{non conservatives}})$$

Théorème de la puissance mécanique:

$$\frac{d}{dt}\left(E_m(M)_{/R}\right) = P(\vec{F}_{\text{non conservatives}})$$

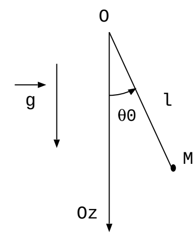
avec E_c: on tient compte de toutes les forces sur M

avec E_m: on ne tient que des forces non conservatives (les forces conservatives sont dans $E_m = E_c + E_p$)

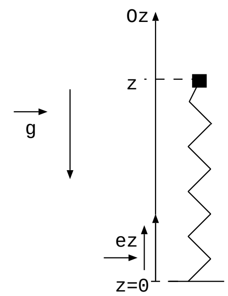
Application des théorèmes énergétiques

Exemple 1: soit un point matériel de masse m qu'on lance depuis le sol avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ verticale ascendante. Montrer que le point matériel constitue un système conservatif et exprimer la hauteur maximale atteinte par le point matériel lorsqu'on néglige tout frottement et qu'on suppose que le champ de pesanteur est constant.

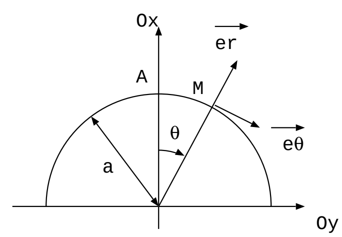
Exemple 2: soit un pendule simple de masse m et de longueur l. On néglige tout frottement. On écarte le pendule d'un angle θ_0 par rapport à la verticale et on l'abandonne sans vitesse initiale. Montrer que le pendule est un système conservatif, exprimer la vitesse du pendule lorsqu'il arrive à la verticale.



Exemple 3: soit un point matériel M de masse m relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On repère la position de M par sa côte z (Oz verticale ascendante ~~descendante~~). Etablir l'expression de l'énergie mécanique du point matériel et déduire du théorème de la puissance mécanique l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ lorsque on néglige tout frottement. La résoudre pour déterminer $z(t)$ lorsque le point matériel est abandonné sans vitesse initiale lorsque la longueur ressort est égale à sa longueur à vide. Indice: oscillateur harmonique.



Exemple 4: soit un point matériel M de masse m qui se déplace sur une demi-sphère de centre O et de rayon a. On néglige tout frottement. M est abandonné sans vitesse initiale depuis le haut de la sphère en A. Montrer que le point matériel constitue un système conservatif, exprimer sa vitesse lorsqu'il est à la position repérée par θ. Déduire de la RFD la réaction du support lorsque le point matériel se trouve en θ. Indice : utiliser $\overrightarrow{a}(M) = -\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta}$



Exemple 5: soit un pendule simple de masse m et de longueur l. On note θ l'angle que fait le pendule par rapport à la verticale. Le pendule subit une force de frottements fluide de la forme $\overrightarrow{f} = -mh\overrightarrow{v}(M)$. Déduire du théorème de la puissance mécanique l'équation différentielle vérifiée par θ.