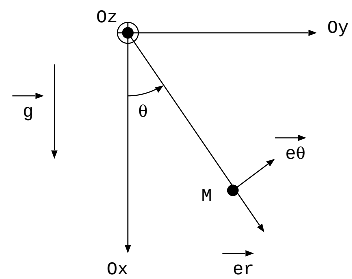
TD de mécanique

I. Pendule

Soit un pendule simple de longueur l et de masse m suspendu au point O. On néglige tout frottement. Le pendule subit en plus des forces habituelles, une force de la forme $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{e_y}$ avec $F > 0$. Le référentiel d'étude est supposé galiléen.

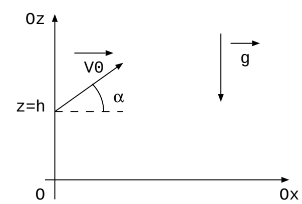
Déterminer la position d'équilibre θ_e du pendule.



Réponse: $\tan\theta_e = \dfrac{F}{mg}$

II. Projectile

Soit un projectile M de masse m envoyé depuis un point d'altitude h avec la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale Ox. On néglige tout frottement.



1. Déterminer les équations paramétriques du mouvement $x(t)$ et $z(t)$.

2. Exprimer l'instant t pour lequel le projectile atteint le sol ainsi que l'abscisse x de ce point.

Réponses: 1- $x(t) = v_0 \cos\alpha t$ *et* $z(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha t + h$ *2-* $t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{(\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g})^2 + \dfrac{2h}{g}}$

III. Champ de pesanteur

Dans ce problème on tient compte de la variation du champ de pesanteur en fonction de l'altitude z d'un point matériel de masse m. On néglige la résistance de l'air. On note M_T et R_T, la masse et le rayon de la Terre.

1. Exprimer le poids du projectile et démontrer l'expression de l' énergie potentielle de pesanteur associée.

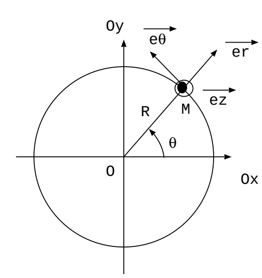
2. En déduire l'altitude maximale atteinte par un projectile lancé verticalement à partir de la surface de la terre avec une vitesse initiale v_0.

3. Déterminer la vitesse minimale pour laquelle le projectile part à l'infini. Quel nom porte cette vitesse?

Réponses: 1- $E_p = -\dfrac{\mathcal{G}mM_T}{R_T + z}$ *2-* $h = R_T(\dfrac{1}{1 - \frac{R_T v_0^2}{2\mathcal{G}M_T}} - 1)$ *3-* $v_{min} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}}$

IV. Mouvement circulaire

Soit un point matériel M de charge $-e < 0$ et de masse m qui décrit un cercle de centre O et rayon R. Au point O se trouve la charge $+e > 0$. On néglige tout frottement et on néglige les forces d'interaction gravitationnelle.



1. Déduire de la RFD appliquée à M l'expression de la norme v de la vitesse de M et de la période T de son mouvement de rotation.

2. Exprimer l'énergie mécanique de M.

Réponses: 2- $v = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mR}}$ *3-* $E_m = \dfrac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$

V. **Chute d'un objet en présence de frottements**

Un petit aimant de masse m est lâché sans vitesse initiale dans un tube cylindrique de cuivre vertical de longueur L. Les frottements de l'air sont négligés dans cette étude. Au cours de la chute apparaissent des courants induits dans le tube, qui engendrent une force de frottement sur l'aimant de la forme $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. On note $\vec{g}$ le champ de pesanteur uniforme.

1. Établir l'équation différentielle sur le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ de l'aimant puis la résoudre. On fera apparaître un temps τ caractéristique du régime transitoire, et une vitesse limite $\vec{v_l}$.

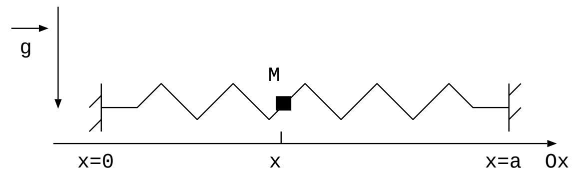
2. Exprimer $\vec{v'}(t)$ en cas de chute dans un tube en verre.

3. Représenter sur le même graphe les normes des vitesses $\vec{v}(t)$ et $\vec{v'}(t)$.

Réponses: 1- $\tau = \dfrac{m}{\alpha}$ *et* $\vec{v}(t) = \vec{g}\tau(1 - e^{-t/\tau})$ *2-* $\vec{v'}(t) = \vec{g}t$

VI. **Deux ressorts**

Soit un point M de masse m qui peut se déplacer sans frottement sur l'axe Ox. Il est relié à deux ressorts identiques de même constante de raideur k et de même longueur à vide l_0.



1. Exprimer les forces de rappel exercées sur M de la part des ressorts de gauche $\vec{F_g}$ et de droite $\vec{F_d}$ en fonction des données: a, x, l_0, k et $\vec{e_x}$.

2. Déterminer la position d'équilibre x_e de M.

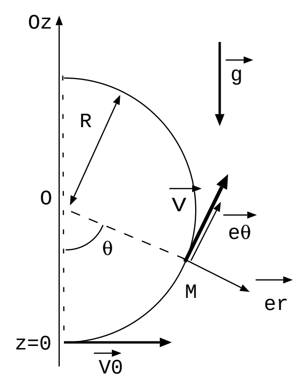
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ par application de la RFD et par un raisonnement énergétique.

4. A l'instant $t = 0$, M se trouve en $x = a/2$ avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$. Déterminer $x(t)$ et tracer l'allure de la courbe $x(t)$.

Réponses: 2- $x_e = a/2$ *3-* $\ddot{x} + \dfrac{2k}{m}x = \dfrac{ka}{m}$ *4-* $x(t) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

VII. **Looping**

Soit un point M de masse m qui se déplace sans frottement à l'intérieur d'un rail circulaire de rayon R et de centre O. En bas du rail M possède une vitesse de norme v_0. La position de M est repéré par ses coordonnées polaires.



1. Déterminer l'expression de la vitesse de M en fonction de θ, g et R.

2. Déterminer l'expression de la réaction du support en fonction de m, g, v_0 et θ.

3. A quelle condition sur v_0, M peut il réaliser un looping sans décoller du rail?

Réponses: 1- $v = \sqrt{v_0^2 + 2gR(\cos\theta - 1)}$ *2-* $N = mg(3\cos\theta - 2) + \dfrac{mv_0^2}{R}$ *3-* $v_0 > \sqrt{5gR}$