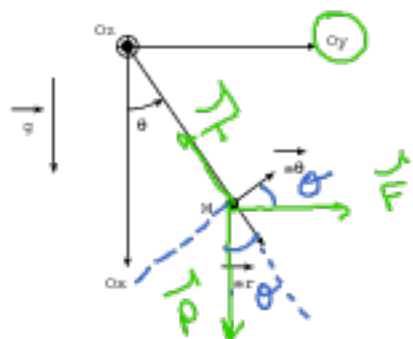




$$\vec{F} = \hat{F} \vec{e}_y$$

Système : pendule M
Réf. d'étude galiléenne

Bilan des forces : $\vec{P}, \vec{T}, \vec{F}$

$$\text{RFS: } \vec{O} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}$$

$$\vec{T} = -\|\vec{T}\| \vec{e}_r$$

$$\vec{P} = mg(+\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{F} = \|\vec{F}\| (+\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{O} = -\|\vec{T}\| \vec{e}_r + mg\cos\theta \vec{e}_r - mg\sin\theta \vec{e}_\theta + \|\vec{F}\| \sin\theta \vec{e}_r + \|\vec{F}\| \cos\theta \vec{e}_\theta$$

$$\text{sur } \vec{e}_r: -\|\vec{T}\| + mg\cos\theta + \|\vec{F}\| \sin\theta = 0 \quad \text{sat à trouver } \|\vec{T}\|$$

$$\text{sur } \vec{e}_\theta: -mg\sin\theta + \|\vec{F}\| \cos\theta = 0 \quad \text{sat à trouver } \theta_e$$

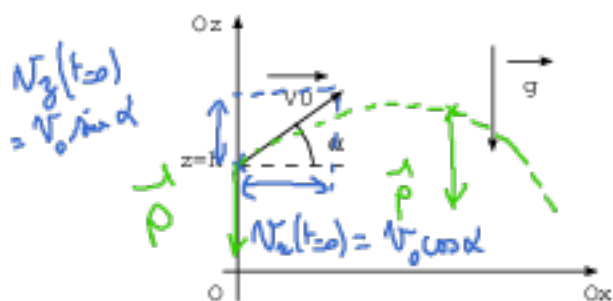
$$mg\sin\theta_e = \|\vec{F}\| \cos\theta_e$$

$$\boxed{\tan\theta_e = \frac{\|\vec{F}\|}{mg}}$$

$$\text{sp: } \|\vec{F}\| = 0 \quad \tan\theta_e = 0$$

$$\theta_e = 0$$





1) Système : projectile M
Ref d'étude galiléen

M ne subit que son poids

$$\text{PFD} : m \vec{a}(M)_k = m \vec{g} = \cancel{m} (-g \vec{e}_y)$$

$$\text{sur } (Ox) : \ddot{x} = 0$$

$$(Oy) : \ddot{z} = -g$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \text{Cste} = \overbrace{v_0 \cos \alpha}^{v_{x_0}(t_0)} \\ \dot{z} = -gt + \text{Cste}' = -gt + \underbrace{v_0 \sin \alpha}_{v_{z_0}(t_0)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t + 0 \\ z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha t + \underbrace{h}_{z(t_0)=h} \end{cases} \quad \text{avec } x(t_0)=0$$

2) M touche le sol pour $z(t_f)=0$

$$-\frac{gt_f^2}{2} + v_0 \sin \alpha t_f + h = 0$$

$$t_f^2 - \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} t_f - \frac{2h}{g} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + \frac{8h}{g} > 0$$

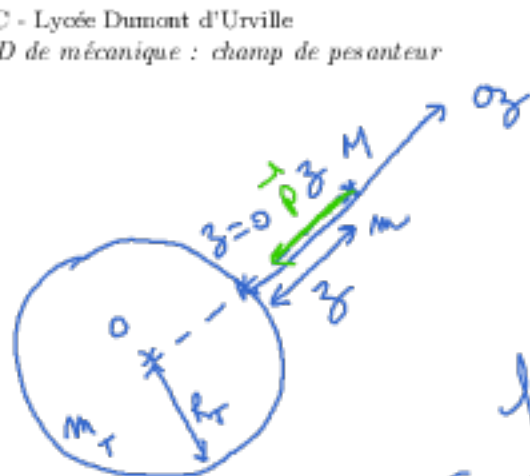
$$t_{f1} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} > 0$$

$$t_{f2} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) < 0$$

$\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$

solution ne
correspond pas

$$t_f = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + \frac{2h}{g}}$$



1) Système : point M
Réf. d'étude galiléenne
M ne subit que son poids :
$$\vec{P} = -G \frac{m m_T}{(R_T + z)^2} \vec{e}_z$$

force conservative :

$$\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{OM} = -G \frac{m m_T}{(R_T + z)^2} \vec{e}_z \cdot dz \vec{e}_z$$

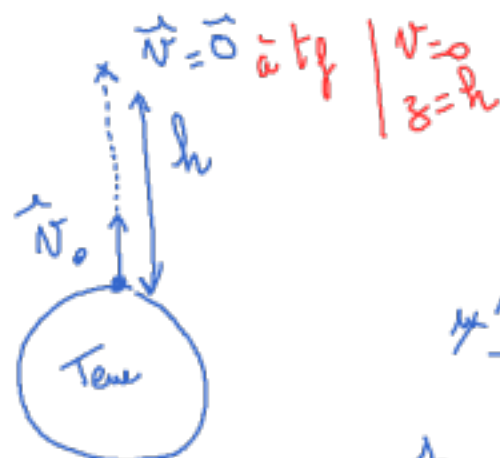
$$d\vec{OM} = dz \vec{e}_z \quad d\vec{OM} = dz \vec{e}_z$$

$$\delta W(\vec{P}) = -G \frac{m m_T}{(R_T + z)^2} dz = -dE_p \quad \text{d'où} \quad \frac{dE_p}{dz} = G \frac{m m_T}{(R_T + z)^2}$$

primitive : $E_p = -G \frac{m m_T}{R_T + z} + \text{const}$

pas de forces non conservatives

2)



$$E_m = \frac{m v^2}{2} - G \frac{m m_T}{R_T + z} = \text{conste}$$

$$E_m(t \rightarrow \infty) = E_m(t_f)$$

$$\frac{m v_0^2}{2} - G \frac{m m_T}{R_T} = 0 - G \frac{m m_T}{R_T + h}$$

$$\frac{1}{R_T + h} = \frac{1}{R_T} - \frac{v_0^2}{2G m_T}$$

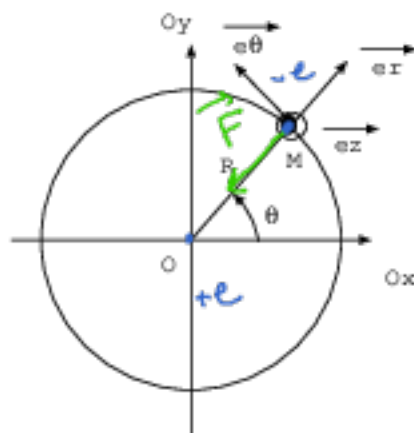
$$\frac{1}{G m_T}$$

$$R_T + h = \frac{(1 - \frac{v_0^2 R_T}{2G m_T}) R_T}{1 - \frac{v_0^2 R_T}{2G m_T}} \Rightarrow h = \frac{R_T}{1 - \frac{v_0^2 R_T}{2G m_T}} - R_T$$

$h \rightarrow \infty$: dénominateur nul

$$1 = \frac{v_0^2 R_T}{2G m_T} \Rightarrow v_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2G m_T}{R_T}}$$

intens de libération (on quitte l'attraction de la Terre)



- 1) Système : électron en M
 Réf. d'étude supposée galiléenne
 M ne subit que la force électrostatique :

$$\vec{F}_e = \frac{+e \times (-e)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_r$$

$$\text{RFD: } m \vec{a}(M)_R = \vec{F}_e$$

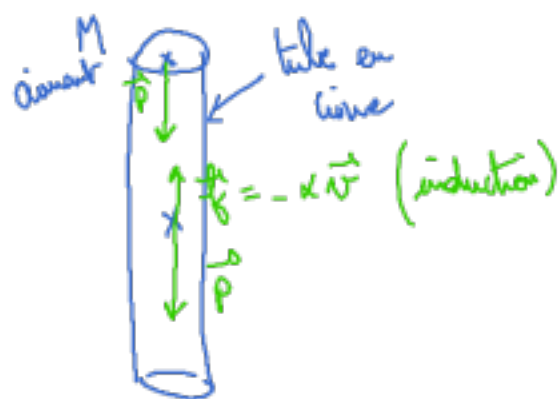
$$\text{avec } \vec{a}(M)_R = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta$$

on projette sur $\vec{e}_\theta$: $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}$

sur $\vec{e}_r$: $-m \frac{v^2}{R} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R}}$

période : $T = \frac{\text{distance}}{v} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m R^3}{e^2}}$

2) $E_m = \frac{m v^2}{2} + E_{pe} = \frac{m e^2}{2 \times 4\pi\epsilon_0 m R} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$



1) Système : aimant M
 réf. d'étude galiléenne
 bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$
 $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$

RFD : $m \vec{a}(M)_R = m\vec{g} - \alpha \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

d'où $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m} \vec{v} = \vec{g}}$ eq. diff. du 1^{er} ordre avec 2nd membre

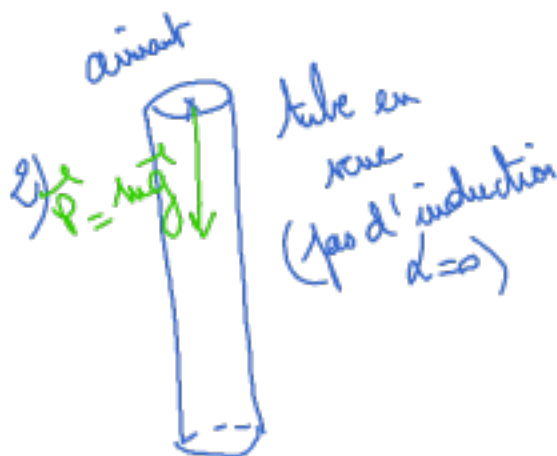
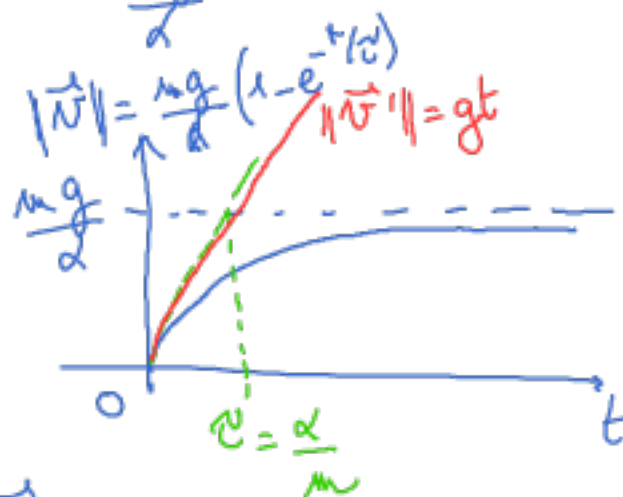
on pose : $\tau = \frac{m}{\alpha}$ (temps caractéristique)

solution : $\vec{v}(t) = \vec{A} e^{-t/\tau} + \vec{v}_p$
 $= \vec{A} e^{-t/\tau} + \frac{m\vec{g}}{\alpha}$

$\vec{v}_p$ cste $\frac{d\vec{v}_p}{dt} = 0$
 $\frac{\alpha}{m} \vec{v}_p = \vec{g} \Rightarrow \vec{v}_p = \frac{m\vec{g}}{\alpha}$

C.I. : $\vec{v}(t \rightarrow \infty) = \vec{0} = \vec{A} + \frac{m\vec{g}}{\alpha} \Rightarrow \vec{A} = -\frac{m\vec{g}}{\alpha}$

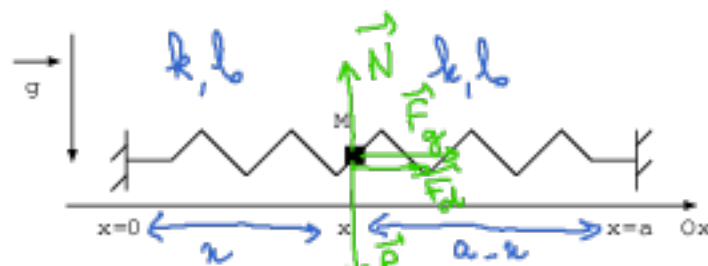
$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{m\vec{g}}{\alpha} (1 - e^{-t/\tau})}$



RFD : $m \vec{a} = m\vec{g}$
 $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$

soit $\boxed{\vec{v} = \vec{g} t}$

1)



loi de Hooke: $\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{e}_x$ spires vers M

$$\vec{u}_d = -\vec{e}_x$$

$$\vec{F}_d = -k(a-x-l_0)(-\vec{e}_x) = k(a-x-l_0)\vec{e}_x$$

$$\vec{F}_g = -k(x-l_0)\vec{e}_x$$

$$\vec{u}_g = +\vec{e}_x$$

2) Système : point M.
ref. d'étude galiléenne

Bilan des forces : poids, réaction normale et les forces de rappel

RFS: $\vec{0} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_d + \vec{F}_g$ on projette sur (Ox): $k(a-x_e-l_0) - k(x_e-l_0) = 0$
 $a - 2x_e = 0$ soit $\boxed{x_e = \frac{a}{2}}$ la position est au milieu, les ressorts sont identiques

3) RFD: $m\vec{a}(M)_R = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_d + \vec{F}_g$ avec $\vec{OM} = x\vec{e}_x$ $\vec{v}(M)_R = \dot{x}\vec{e}_x$ $\vec{a}(M)_R = \ddot{x}\vec{e}_x$
 on projette sur (Ox): $m\ddot{x} = k(a-x-l_0) - k(x-l_0) = ka - 2kx$

d'où $\boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{ka}{m}}$

OH. de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

ou Bilan des forces:

$\vec{P}$ et $\vec{N}$ sont $\perp$ au m^{ur} donc elles ne travaillent pas
 et les forces de rappel sont conservatives: $E_{pr} = \frac{k}{2}(l-l_0)^2$

$$E_{prd} = \frac{k}{2}(a-x-l_0)^2 \quad E_{prg} = \frac{k}{2}(x-l_0)^2$$

d'où $E_m(M)_R = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{2}(a-x-l_0)^2 + \frac{k}{2}(x-l_0)^2$

th. de la puissance mécanique: $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{non\ conservative}) = 0$

$$\frac{m}{2} \frac{d(\dot{x}^2)}{dt} + \frac{k}{2} \frac{d}{dt}(a-x-l_0)^2 + \frac{k}{2} \frac{d}{dt}(x-l_0)^2 = 0$$

$$(u^2)' = 2uu'$$

$$\frac{m}{2} \cancel{\mathcal{L}} \cancel{\ddot{x}} \ddot{x} + \frac{k}{2} \cancel{\mathcal{L}} (a - x - l_0) (-\dot{x}) + \frac{k}{2} \cancel{\mathcal{L}} (x - l_0) \dot{x} = 0$$

$$\left(\mu = \ddot{x} \right) \quad \left(\mu = a - x - l_0 \right) \quad \left(\mu = x - l_0 \right)$$

$$\quad \quad \quad \omega' = -\dot{x} \quad \quad \quad \mu' = \dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m} x = \frac{ka}{m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

b) Solution: $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_p$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{a}{2}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = 0 \\ \frac{2k}{m} x_p = \frac{ka}{m} \\ x_p = \frac{a}{2} = x_{eq} \end{cases}$$

C.I. $x(t=0) = \frac{a}{2} = A + \frac{a}{2} \Rightarrow A = 0$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 = B \omega_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

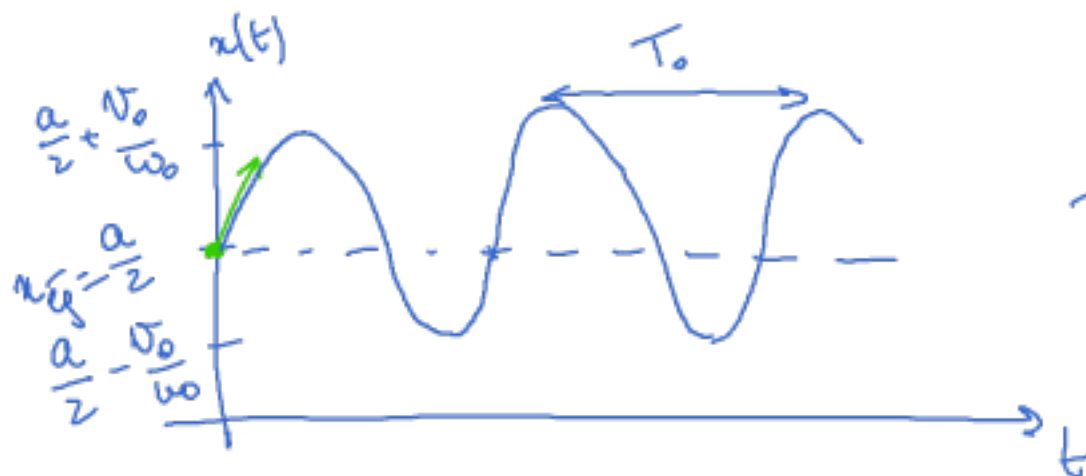
$$\dot{x}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$x(t) = \frac{a}{2} + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

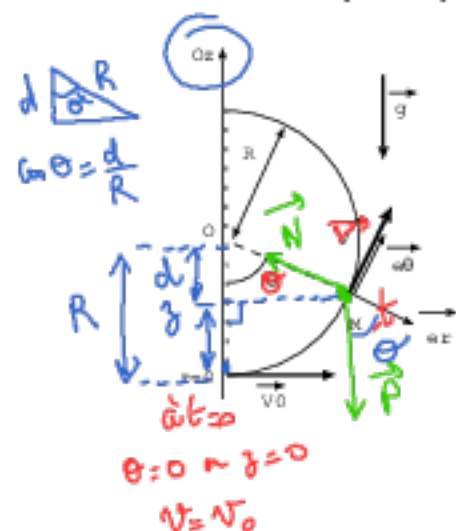
$x(t)$ est compris :

$$\frac{a}{2} + \frac{v_0}{\omega_0} = x_{max}$$

$$\frac{a}{2} - \frac{v_0}{\omega_0} = x_{min}$$



$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$



1) Système : part M
réf. d'étude galiléenne

Relevé des forces :

* la réaction N ne travaille

* le poids est conservatif : $E_{pp} = \oplus mgy = mgr(1 - \cos \theta)$

$$R = d + z \Rightarrow z = R - d = R - R \cos \theta$$

$$\text{donc } E_m(t)_R = \frac{mv^2}{2} + mgr(1 - \cos \theta)$$

l' E_m est cette (mécanisme conservatif)

$$E_m(t=0) = E_m(t)$$

$$\frac{mv_0^2}{2} + 0 = \frac{mv^2}{2} + mgr(1 - \cos \theta) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos \theta - 1)}} \quad \text{avec } \cos \theta < 0$$

2) RFD : $m\vec{a}(M)_R = \vec{P} + \vec{N}$ avec $\vec{N} = -\|\vec{N}\|\vec{e}_r$ $\vec{P} = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$

$$\vec{a}(M)_R = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$$

$$\text{ou } a_r : -m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + m\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta = -\|\vec{N}\|\vec{e}_r + mg\cos \theta \vec{e}_r - mg\sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\text{on projette sur } \vec{e}_r : -\frac{mv^2}{R} = -\|\vec{N}\| + mg\cos \theta$$

$$\|\vec{N}\| = mg\cos \theta + \frac{mv^2}{R} = mg\cos \theta + \frac{mv_0^2}{R} + 2mg(\cos \theta - 1)$$

$$\boxed{\|\vec{N}\| = \frac{mv_0^2}{R} + mg(3\cos \theta - 2)}$$

quand M monte, $\|\vec{N}\| \downarrow$

3) Le looping est réussi à condition que $\|\vec{N}\|$ ne s'annule pas

$$\underbrace{\|\vec{N}(\theta=\pi)\|}_{\text{réaction minimale}} > 0$$

$$\frac{mv_0^2}{R} + mg(-3-2) > 0$$

$$\boxed{v_0 > \sqrt{5gr}}$$