TD dynamique en référentiel non galiléen

Pour les exercices, la méthode est la suivante:

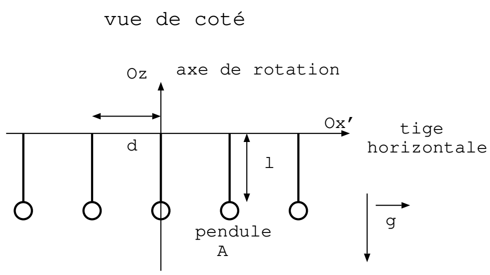
- L'énoncé définit un référentiel $\mathcal{R}$ fixe galiléen et un référentiel $\mathcal{R}'$ mobile dans $\mathcal{R}$. Identifier le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ et en déduire les expressions des forces d'inertie. Représenter les forces qui s'exercent sur le système dans $\mathcal{R}'$

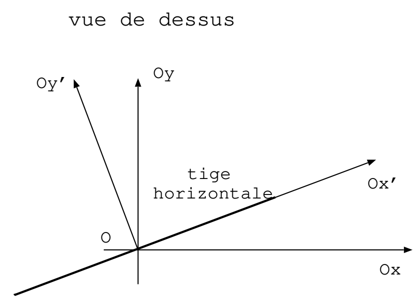
- Exprimer la vitesse et l'accélération relatives de M : c'est soit une translation et on travaille en coordonnées cartésiennes avec une seule variable, soit un mouvement circulaire et on travaille en coordonnées polaires.

- Appliquer la RFD, le théorème du moment cinétique et les théorèmes énergétiques dans un référentiel non galiléen.

I. **Pendules en rotation**

Une série de cinq pendules identiques (masse m et longueur de fil l) équidistants de d sont accrochés sur une tige *horizontale*. Cette tige est mise en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical Oz passant par son milieu. On note $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le référentiel lié au sol et $\mathcal{R}'(O,\vec{i}',\vec{j}',\vec{k})$ le référentiel lié à la tige. On donne les deux vues de dessus et de côté du système.





1. Représenter les cinq pendules lorsque l'axe est en mouvement et que les pendules sont à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$. Respecter l'ordre de grandeur des angles.

On note θ_e l'angle de déviation du pendule A à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$.

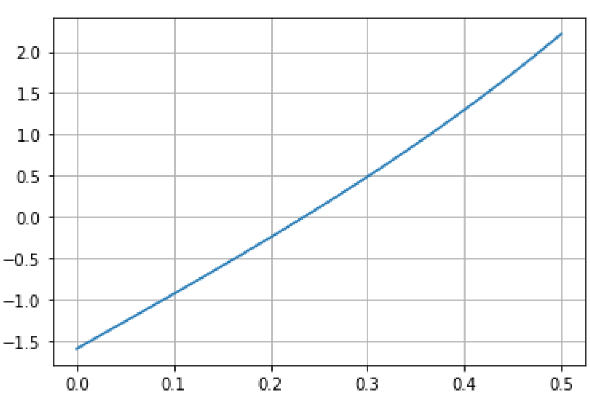
2. Quel est le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$? en déduire les expressions des forces d'inertie exercées sur M.

3. Représenter le pendule A et les forces qui s'exercent sur lui dans $\mathcal{R}'$. Appliquer la RFD dans $\mathcal{R}'$ au pendule A et en déduire l'équation $(*)$ vérifiée par θ.

On cherche la valeur de θ_e solution de $(*)$ pour cela on fait une résolution sous python.

4. On donne le code suivant dont l'exécution donne la courbe ci-contre:

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 g,l,d,omega=9.8,0.2,0.1,....
4 x=np.linspace(...,....,500)
5 y=g*np.tan(x)-omega**2*(d+l*np.sin(x))
6 plt.plot(x,y)
7 plt.grid()
8 plt.show()
```



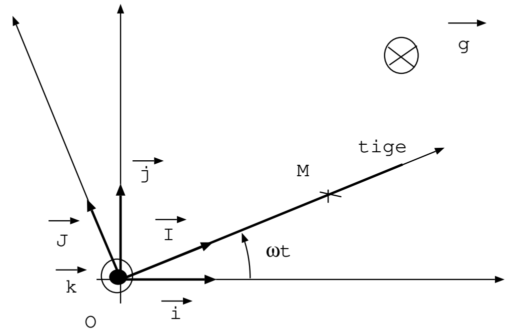
Déduire du code les valeurs numériques de l et d et compléter la ligne 4.

Donner l'expression de la fonction $f(x)$ tracée et en déduire la valeur numérique de θ_e en radian puis en degré. En déduire la valeur numérique de ω.

Réponses: 3- $g\tan\theta_e = \omega^2(d + l\sin\theta_e)$ *(*) 4-* $\theta_e = 13,2^0$ *et* $\omega = 4$ $rad.s^{-1}$

II. **Anneau sur une tige**

Une tige horizontale OT de longueur l est soudée à un axe vertical tournant à la vitesse angulaire ω constante. Un anneau de masse m est abandonné sans vitesse initiale à la distance $l/2$ de l'axe et il peut glisser sans frottement sur la tige. On note X l'abscisse de M sur la tige.



On note $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le référentiel fixe lié au sol supposé galiléen.

On étudie le mouvement de l'anneau dans le référentiel lié à la tige noté $\mathcal{R}'(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$ $((O, \vec{I})$ désigne la direction de la tige OT).

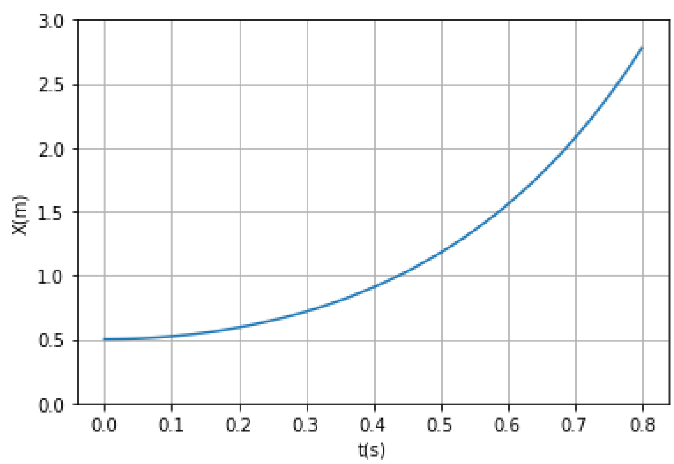
1. Quel est le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$? en déduire l'expression de sa vitesse relative et de son accélération relative dans la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

2. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ en déduire les expressions des forces d'inertie exercées sur M en fonction de m, ω, X, $\dot{X}$ dans la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

3. La réaction du support est de la forme $\overrightarrow{R} = R_X \overrightarrow{I} + R_Y \overrightarrow{J} + \overrightarrow{R_z} \overrightarrow{k}$. Une des composantes de la réaction est nulle, préciser laquelle en justifiant. Appliquer la RFD dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et établir différentielle vérifiée par $X(t)$. En déduire $X(t)$. Rappel: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

4. On donne le code suivant et le résultat de son exécution:

```
1 omega,l=3,......
2 t=np.linspace(....,.....,.....)
3 X=........
4 plt.plot(t,x)
5 plt.grid()
6 plt.xlabel('.........')
7 plt.ylabel('.........')
8 plt.show()
```



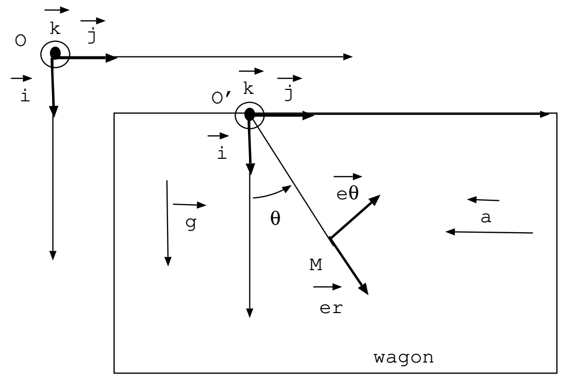
Déduire de la courbe la valeur numérique de l et compléter le code.

Déterminer l'instant t_f pour lequel l'anneau atteint le bout de la tige. Calculer l'angle θ_f dont a tourné la tige à cet instant.

5. Montrer que l'énergie mécanique du système dans $\mathcal{R}'$ est constante. Exprimer l'énergie mécanique dans $\mathcal{R}'$ en fonction de la variable X et des données et retrouver l'équation différentielle vérifiée par $X(t)$.

Réponses : 3- $\ddot{X} - \omega^2 X = 0$, $X = l/2 \cosh(\omega t)$ 4- $\theta_f = 1,3\ rad$

III. **Pendule dans un train**



Un pendule constitué d'une masse m et d'un fil de masse négligeable et de longueur $l =$ O'M est fixé au plafond d'un train animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{a} = -a\vec{j}$ (avec $a > 0$). Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le référentiel lié à la terre et supposé galiléen et $\mathcal{R}'(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le référentiel lié au train. On note θ l'angle entre le fil et la verticale descendante. Avec les notations de l'énoncé le champ de gravitation s'écrit $\vec{g} = g\,\vec{i}$

1. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ et faire le bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}'$.

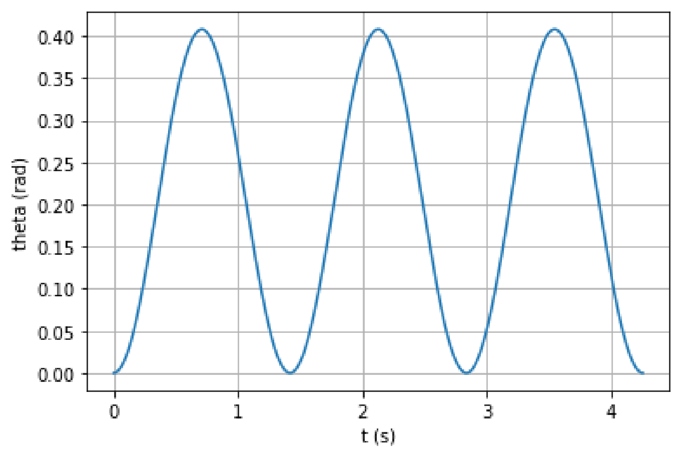
2. Dans un premier temps, le pendule est à l'équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Il fait un angle θ_e par rapport à la verticale. Déduire de l'application de la RFD l'expression de θ_e en fonction de g et a.

3. M est en mouvement dans $\mathcal{R}'$. Déduire du théorème du moment cinétique appliqué à M dans $\mathcal{R}'$ par rapport à O', l'équation différentielle vérifiée par θ.

4. Dans l'hypothèse des petits angles, simplifier l'équation différentielle vérifiée par θ et en déduire l'expression de la position d'équilibre θ_e et de la période T_0 des oscillations. On note $\theta(t=0) = \theta_0$ et $v(t=0) = l\dot{\theta}(t = 0) = v_0$. Etablir l'expression de $\theta(t)$.

On donne le code et le résultat de son exécution:

```
g,a,l=9.8,.....,......
omega0=............
T0=..............
t=np.linspace(0,......*T0,500)
theta0,v0=.......,.........
theta=............................
plt.plot(t,theta)
plt.grid()
plt.xlabel('...........')
plt.ylabel('..............')
plt.show()
```



Déduire de la courbe, les valeurs numériques de θ_e et T_0 en déduire les valeurs numériques de a et l. Compléter le code.

A l'instant $t_1 = 3,5\ s$ l'accélération du train s'annule instantanément, donner l'allure de la fonction $\theta(t)$ pour $t > t_1$.

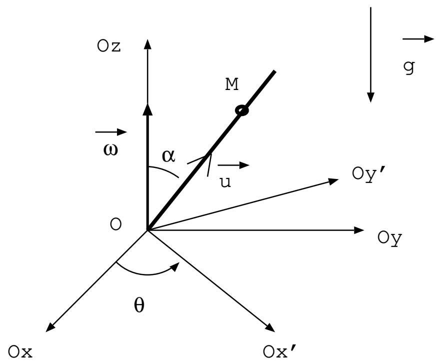
5. Montrer que la force d'inertie d'entraînement est conservative et exprimer son énergie potentielle en fonction de y puis en fonction de θ et des données.

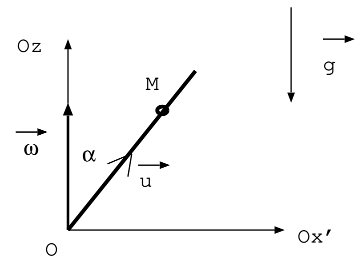
Montrer que l'énergie mécanique du système dans $\mathcal{R}'$ est constante. Exprimer l'énergie mécanique dans $\mathcal{R}'$ en fonction de θ et des données et retrouver l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

Réponses : 2- $\tan\theta_e = a/g$ 3- $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta - \frac{a}{l}\cos\theta = 0$ 4- $\theta(t) = \frac{a}{g} + (\theta_0 - \frac{a}{g})\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{l\omega_0}\sin(\omega_0 t)$, $a = 2\ m.s^{-2}$, $l = 50\ cm$

IV. **Tige inclinée en rotation**

Un anneau considéré comme ponctuel positionné au point M, de masse m, peut glisser sans frottement sur une tige inclinée d'un angle α constant par rapport à la verticale. La tige tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de Oz. On note $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire dirigé selon l'axe de la tige. On note X la distance OM. On définit le référentiel $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ lié au sol et supposé galiléen et e référentiel $\mathcal{R}'(O, \overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e'_y}, \overrightarrow{e_z})$ lié à la tige.





1. M est à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$.

1.a. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$. Faire un bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}'$ et les représenter sur le schéma de droite donné dans l'énoncé.

1.b. Déduire de la RFD appliquée à l'anneau à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$, la distance $X_e = OM$ à l'équilibre.

2. M est en mouvement dans $\mathcal{R}'$.

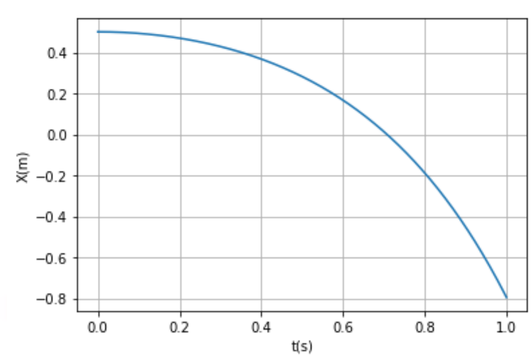
2.a. Exprimer en fonction de m, ω, g, α, X et $\dot{X}$, l'énergie mécanique de M dans $\mathcal{R}'$.

2.b. Montrer que l'énergie mécanique est constante et en déduire l'équation différentielle vérifiée par X.

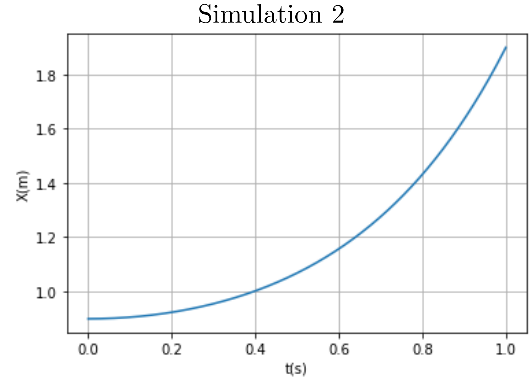
3. On résout cette équation différentielle numériquement avec la méthode d'Euler. Pour cela on donne le code suivant et le résultat de son exécution pour des conditions initiales $X(t=0) = X0$ et $\dot{X}(t=0) = v0$ différentes.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

alpha,g,omega=np.pi/3,9.8,3
N=1000
dt=........
Xe=g*np.cos(alpha)/omega**2/np.sin(alpha)**2
X0=.....
v0=.....
X=[X0]
v=[v0]
t=[0]
for i in range(N):
    C=-g*np.cos(alpha)+omega**2*np.sin(alpha)**2*X[i]
    t.append(t[i]+dt)
    v.append(v[i]+............)
    X.append(X[i]+............)

plt.plot(t,X)
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel('X(m)')
plt.grid()
plt.show()
```

Simulation 1



Simulation 2



3.a. Déduire des valeurs numériques du code, la valeur numérique de la position d'équilibre X_e.

3.b. Déduire des courbes les valeurs numériques de $X0$ et $v0$ pour chaque simulation.

3.c. Que représente la grandeur physique C ligne 22?

3.d. Exprimer $v(t+dt)$ en fonction de $v(t)$, dt et $\dfrac{dv}{dt}$. Compléter la ligne 24.

3.e. Exprimer $X(t+dt)$ en fonction de $X(t)$, dt et $\dfrac{dX}{dt}$. Compléter la ligne 25.

3.f. Déduire de la durée des simulations, la valeur numérique de dt (ligne 14).

3.g. La tige a pour longueur $l = 1,2\ m$. Décrire sur les deux simulations le mouvement de l'anneau et en déduire si la position d'équilibre est stable ou instable (pour cela, comparer $X0$ et X_e pour chaque simulation).

Réponses: 1- $X_e = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$ *2-* $\ddot{X} - \omega^2\sin^2\alpha X = -g\cos\alpha$

V. Masse apparente dans un ascenseur

A savoir : Un pèse personne mesure la norme de la force de réaction exercée par la personne sur le pèse-personne, c'est aussi la norme de la réaction exercée par le pèse personne sur la personne, et affiche cette norme divisée par $g = 9,81\ m.s^{-2}$.

Une personne de masse m décide de se peser dans un ascenseur.

On note $\mathcal{R}$ le référentiel lié au sol supposé galiléen et $\mathcal{R}'$ le référentiel lié à l'ascenseur.

1. L'ascenseur est en train de monter du 1er au dernier étage. Au début de son ascension, il accélère uniformément, on note $\overrightarrow{a_0}$ son vecteur accélération. Décrire le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Faire un schéma en portant les forces exercées sur la personne dans $\mathcal{R}'$. En déduire la réaction du pèse personne et la masse m' indiquée sur le pèse personne. Donnée: $m = 60\ kg$, $a_0 = 2\ m.s^{-2}$ et $g = 9,81\ m.s^{-2}$.

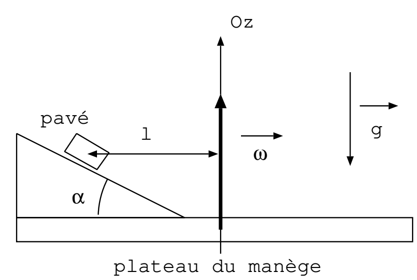
2. La personne lit sur le pèse personne une masse $m' = 55\ kg$. En déduire le sens de l'accélération de l'ascenseur et calculer la valeur de l'accélération dans ce cas.

3. La personne lit sur le pèse personne une masse $m' = 60\ kg$. En déduire l'accélération de l'ascenseur dans ce cas.

Réponses: 1- $m' = 72\ kg$ *2-* $a_0 = 0,8\ m.s^{-2}$

VI. Equilibre dans un référentiel tournant

Un plan incliné d'angle $\alpha = 30^0$ par rapport à l'horizontale est placé sur un plateau en rotation à la vitesse angulaire ω. Un pavé est posé sur le plan incliné et le coefficient de frottement est $f = 0,25$. Le pavé est à l'équilibre sur le plan incliné à une distance $l = 40\ cm$ de l'axe de rotation.



On définit $\mathcal{R}(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel lié au sol et $\mathcal{R}'(0, \overrightarrow{e_x'}, \overrightarrow{e_y'}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel mobile dans lequel le pavé est à l'équilibre.

1. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est-il galiléen? Faire un bilan des forces exercées sur M dans $\mathcal{R}'$.

2. Déduire de la RFD appliquée à M dans $\mathcal{R}'$, les expressions des composantes R_n et R_t de la réaction du plan incliné sur le pavé (choisir pour cela deux axes de projection adaptées).

3. Rappeler les lois de Coulomb et déduire de la RFD appliquée au pavé dans $\mathcal{R}'$, la vitesse angulaire minimum qui permet d'éviter que le pavé ne glisse vers l'axe de rotation. Faire l'application numérique en rad/s et en $tour/minute$.

Réponse: $\omega > \sqrt{\dfrac{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{l(\cos\alpha + f\sin\alpha)}}$

VII. **Une caisse sur un camion**

Une caisse assimilée à un point matériel de masse m est posée sur la plateforme horizontale d'un camion qui a un mouvement rectiligne uniformément accéléré par rapport au sol, considéré comme un référentiel galiléen. Son accélération est $\overrightarrow{a_0} = a_0 \overrightarrow{e_x}$.

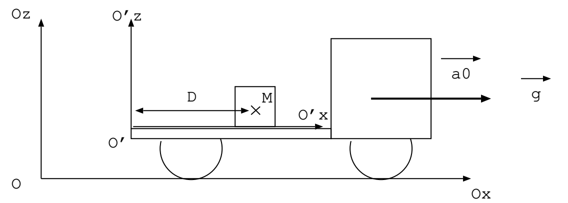
On note $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel lié au sol et $\mathcal{R}'(O', \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel lié au camion.

On note f le coefficient de frottements (on confond les coefficients de frottements statique et dynamique).

1. Rappeler les lois de Coulomb.

2. Faire un bilan des forces appliquées à la caisse dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et déterminer la condition portant sur a_0, f et g pour que la caisse ne glisse pas.

3. A l'instant $t = 0$, le barycentre de la caisse se trouve à une distance D du bord de la plateforme du camion et le chauffeur accélère avec une accélération constante $a_0 > fg$. Déduire de la RFD appliquée à la caisse dans $\mathcal{R}'$, l'instant t pour lequel la caisse tombe du camion.

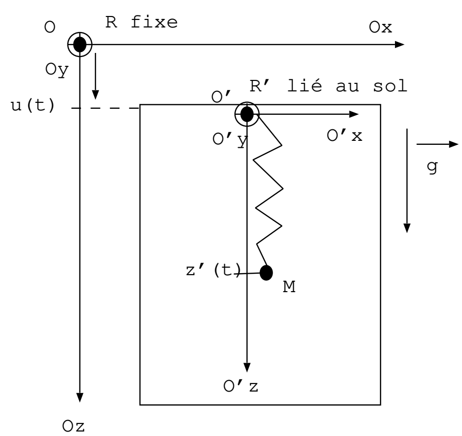


Réponses : 1- $a_0 < fg$ *2-* $t_f = \sqrt{\dfrac{2D}{a_0 - fg}}$

VIII. **Sismomètre**

Un sismomètre peut être modélisé par un boîtier posé sur le sol, contenant un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 dont l'extrémité supérieure est solidaire du boîtier. A l'extrémité inférieure du ressort se trouve un point matériel M de masse m.

On définit un référentiel fixe galiléen $\mathcal{R}$ et un référentiel mobile $\mathcal{R}'$ lié au sol soit au boîtier. En présence d'un tremblement de terre, l'origine O' de $\mathcal{R}'$ vibre, on note $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$. La masse m subit une force de frottement fluide dans $\mathcal{R}'$ de la forme $\overrightarrow{f} = -mh\overrightarrow{v}(M)_{\mathcal{R}'}$.



1. Déterminer la longueur z'_0 du ressort lorsque le système est au repos en l'absence de tremblement de terre.

2. On définit $Z(t) = z'(t) - z'_0$. En raisonnant dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au sol, montrer que $Z(t)$ vérifie l'équation différentielle: $\ddot{Z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = -\ddot{u}$. Exprimer ω_0 et Q en fonction des données.

3. On se place en régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme $Z(t) = Z_m \cos(\omega t + \phi)$. On pose $\underline{u}(t) = u_0 e^{i\omega t}$ et $\underline{Z}(t) = \underline{Z_m} e^{i\omega t}$ avec $\underline{Z_m} = Z_m e^{j\phi}$. Déduire de l'équation différentielle l'expression de $\underline{Z_m}$ en fonction de u_0, ω, ω_0 et Q. Donner la méthode pour déduire Z_m et ϕ de l'expression de $\underline{Z_m}$.

4. On se place à très haute fréquence. Donner une expression approchée de $\underline{Z_m}$ et en déduire Z_m et ϕ. Décrire le mouvement de la masse m par rapport au mouvement du boîtier.

Réponses: 1- $z'_0 = l_0 + \dfrac{mg}{k}$ *2-* $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ *et* $Q = \dfrac{\omega_0}{h}$ *3-* $\underline{Z_m} = \dfrac{\omega^2 u_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q}}$ *4-* $Z_m = u_0$ *et* $\phi = \pi$