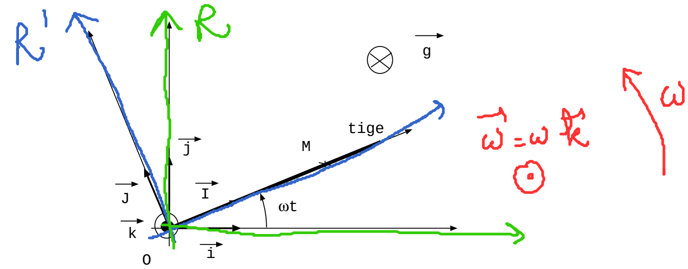
TD cinématique des changements de référentiel

I. Anneau sur une tige

Une tige horizontale de longueur l est soudée en O à un axe vertical Oz tournant à la vitesse angulaire ω constante. Un anneau assimilé à un point matériel M peut glisser sans frottement sur la tige. On étudie le mouvement de l'anneau dans le référentiel lié à la tige $\mathcal{R}'(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$ ($(O, \vec{I})$ désigne la direction de la tige). On note X l'abscisse de M sur la tige.



$\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le référentiel fixe lié au sol.

1. Quel est le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$? en déduire l'expression de sa vitesse relative et de son accélération relative dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$.

2. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. En déduire l'expression de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis de M.

1) M se déplace sur la tige donc dans le référentiel R' lié à la tige, M décrit une droite, M a un mvt rectiligne.

$\vec{OM} = X\vec{I}$ $\quad \vec{v}(M)_{R'} = \vec{v}_r(M) = \dot{X}\vec{I}$ $\quad \vec{a}(M)_{R'} = \vec{a}_r(M) = \ddot{X}\vec{I}$

2) Les axes de R' tournent dans R donc R' est en rotation dans R, on peut même parler de rotation uniforme car la vitesse de rotation est constante.

D'après le cours, dans ce cas :

$\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \vec{HM}$ où H est le projeté ⊥ de M sur l'axe de rotation (Oz)

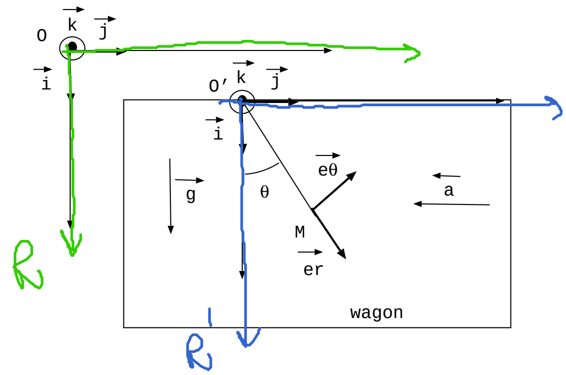
(on trouve H en construisant la droite passant par M et ⊥ à (Oz), ici $H = O$)

$\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \vec{OM} = -\omega^2 X \vec{I}$

et $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(M) = 2\omega \vec{k} \wedge \dot{X}\vec{I} = 2\omega\dot{X}\vec{J}$

II. **Pendule dans un train**

Un pendule est constitué d'un point matériel M suspendu par un fil de longueur l accroché en O' au plafond d'un train. Le train est animé d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{a} = -a\vec{j}$ (avec $a > 0$). Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le référentiel lié à la terre et $\mathcal{R}'(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le référentiel lié au train. On note θ l'angle entre le fil et la verticale descendante.



1. Quel est le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$? en déduire l'expression de sa vitesse relative et de son accélération relative dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.

2. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. En déduire l'expression de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis de M.

1) M décrit un arc de cercle dans R'.

$\overrightarrow{O'M} = l\vec{e_r}$

$\vec{v_r}(M) = \vec{v}(M)_{R'} = l\frac{d\vec{e_r}}{dt} = l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\vec{a_r}(M) = \vec{a}(M)_{R'} = l\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + l\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = l\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

2) R' est en translation rectiligne uniformément accéléré dans R

les axes de R' sont // à ceux de R à tout instant

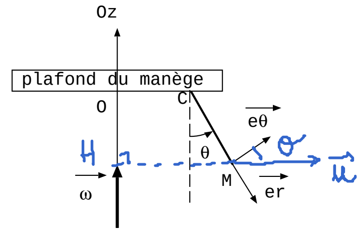
O' décrit une droite avec une accélération constante dans R

Quand R' est en translation dans R on a :

$\vec{a_e}(M) = \vec{a}(O')_R = -a\vec{j}$

$\vec{a_c}(M) = \vec{0}$

III. **Pendule dans un manège**



Soit un manège en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe vertical Oz. Un pendule assimilé à un point matériel M accroché à un fil de longueur l est suspendu au plafond du manège en un point C. Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le référentiel lié à la terre et $\mathcal{R}'(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k})$ le référentiel lié au manège. On note θ l'angle entre le fil et la verticale descendante.

1. Quel est le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$? en déduire l'expression de sa vitesse relative et de son accélération relative dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.

2. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. En déduire l'expression de l'accélération d'entraînement ~~et de l'accélération de Coriolis~~ de M.

1) M décrit un arc de cercle dans R'

$$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM} = \vec{OC} + l\vec{e_r}$$

$$\vec{v_r}(M) = \vec{v}(M)_{R'} = l\frac{d\vec{e_r}}{dt} = l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a_r}(M) = \vec{a}(M)_{R'} = l\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + l\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = l\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\vec{e_r}$$

2) R' est en <u>rotation</u> <u>uniforme</u> dans R

les axes de R' tournent dans R

la vitesse de rotation ω est constante

Dans le cours quand R' est en rotation dans R :

$\vec{a_e}(M) = -\omega^2\vec{HM}$ où H est le projeté ⊥ de M sur l'axe Oz

(on trouve H en construisant la droite passant par M et ⊥ à (Oz))

$$\vec{a_e}(M) = -\omega^2\|\vec{HM}\|\vec{u}$$

$$= -\omega^2\left[d + l\sin\theta\right]\left(\cos\theta\,\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\vec{e_r}\right)$$