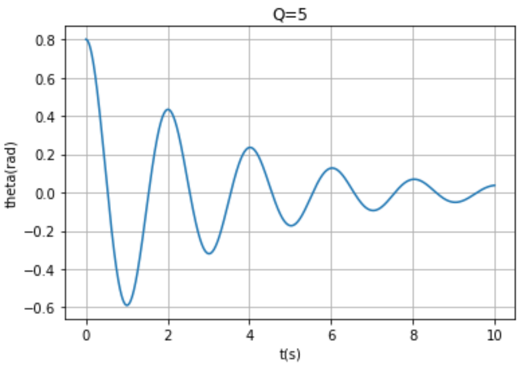
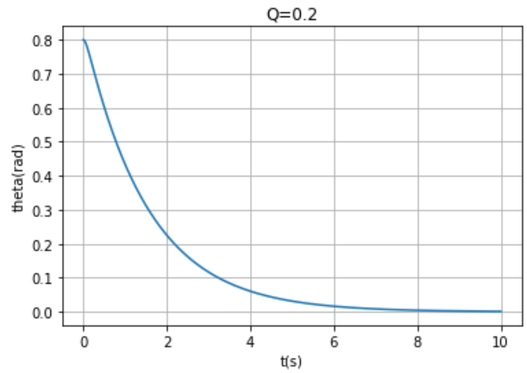
Oscillateur harmonique amorti en régime sinusoidal forcé

Un oscillateur amorti (par exemple le pendule en présence de frottements fluide, aux petits angles) vérifie une équation différentielle de la forme :

Quand on écarte le pendule de sa position d'équilibre verticale et qu'on l'abandonne sans vitesse initiale, il y revient de deux façons différentes:

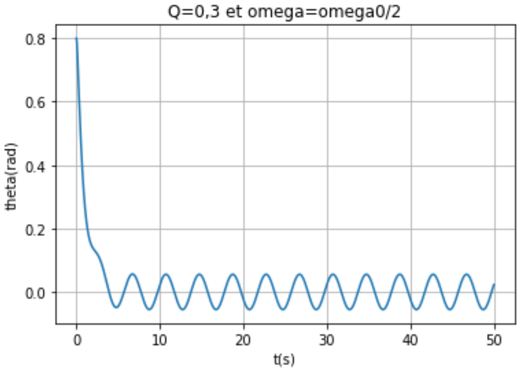


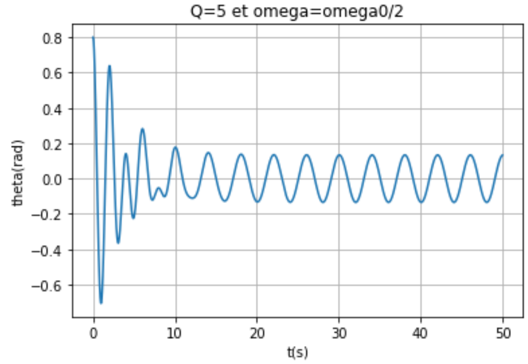


.

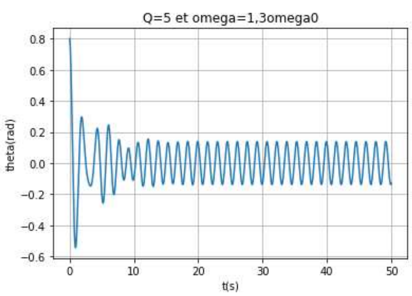
La durée du régime transitoire dépend de l'intensité des frottements mais l'oscillateur finit toujours par s'immobiliser. On peut obliger le système à osciller à la pulsation ω (par exemple, pour le pendule, en déplaçant son point d'attache O: $x_O(t) = A\cos(\omega t)$). Dans ce cas, l'oscillateur amorti vérifie une équation différentielle de la forme :

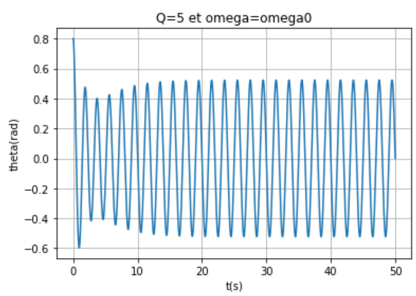
Pour le pendule, des simulations numériques permettent d'observer l'évolution de θ en fonction du temps pour différentes valeurs de Q et de ω.

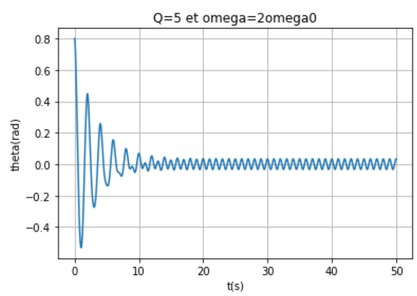

Q=0,3 et omega=omega0/2
theta(rad)
t(s)


Q=5 et omega=omega0/2
theta(rad)
t(s)

.


Q=5 et omega=1,3omega0
theta(rad)
t(s)


Q=5 et omega=omega0
theta(rad)
t(s)


Q=5 et omega=2omega0
theta(rad)
t(s)

Utilisation des complexes

On doit donc apprendre à résoudre l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique amorti en régime forcé:

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = A\cos(\omega t) \text{ où } X = x - x_e$$

La solution de cette équation différentielle comprend:

- une solution générale de l'équation sans second membre :

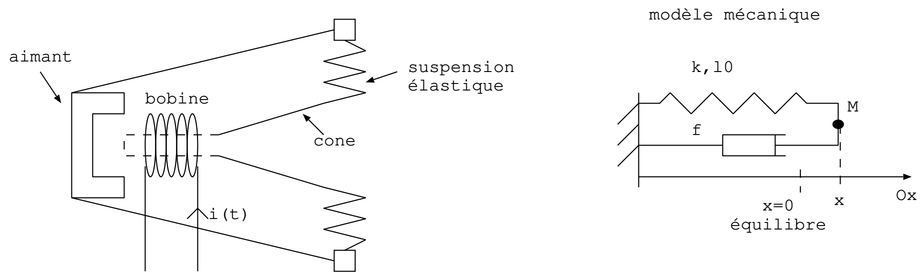
- une solution particulière de la forme $X(t) =$

.

I. **Application: le haut-parleur**

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur à l'aide d'une masse m, se déplaçant horizontalement sans frottement solide le long de l'axe Ox. Cette masse m, assimilée à un point matériel M, est reliée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, ainsi qu'à un amortisseur fluide de constante f. Elle est soumise à une force $\overrightarrow{F}$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur. On a $\overrightarrow{F} = \beta i(t)\overrightarrow{e_x}$ avec β une constante et $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.

Données : $m = 10\ g$, $k = 15000\ N.m^{-1}$, $\beta = 200\ N.A^{-1}$, $f = 9\ SI$ et $I_m = 1\ A$.



1. Déduire de la RFD appliquée à M que l'équation différentielle vérifiée par la variable $X = x - l_0$ se met sous la forme $\ddot{X} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = A\cos(\omega t)$. Exprimer et calculer numériquement ω_0, A et Q.

On étudie le régime permanent du haut parleur, lorsque la membrane vibre à la pulsation ω imposée par le courant, on a donc $X(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$. On pose $\underline{X} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{X}_m = X_m e^{j\phi}$.

2. Exprimer $\underline{X}_m$ et X_m. Rappeler comment on déduit ϕ de $\underline{X}_m$.

3. Pour une pulsation ω_1, on observe le phénomène de résonance. Exprimer ω_1 en fonction de ω_0 et Q et faire l'application numérique.

4. Calculer X_m et ϕ pour $\omega = \omega_0$.