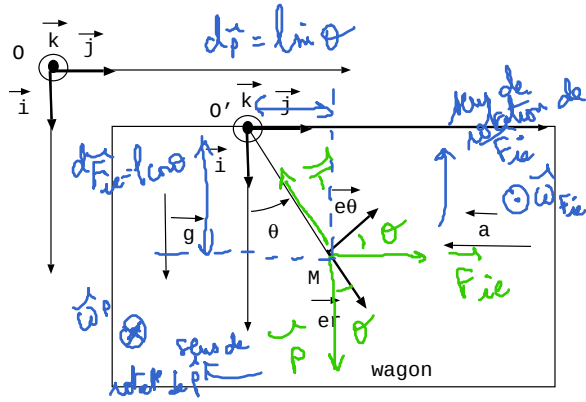


I. Pendule dans un train



1) Les axes de R' sont $\parallel$ à ceux de R à tout instant et O' a un mvt rectiligne uniformément accéléré dans R donc R' est en translation rectiligne uniformément accélérée dans R .
 R' n'est donc pas galiléen

Analyse des forces exercées sur M dans R' :
 forces d'interaction | poids: $\vec{P} = mg(\cos\theta\vec{e}_1 - \sin\theta\vec{e}_2)$
 tension du fil: $\vec{T} = -T\vec{e}_1$

forces d'inertie | $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(O'/R) = +ma\vec{j}$
 $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$

2) A l'équilibre de R' on a: $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$
 en projection sur $\vec{e}_1$: $mg\cos\theta_e - T + ma\sin\theta_e = 0 \Rightarrow$ sert à trouver T
 $\vec{e}_2$: $-mg\sin\theta_e + 0 + ma\cos\theta_e = 0 \Rightarrow$ sert à trouver θ_e
 d'où $g\sin\theta_e = a\cos\theta_e$ $\tan\theta_e = \frac{a}{g}$ $\hookrightarrow$ si $a=0$ on retrouve $\tan\theta_e=0$ soit $\theta_e=0$: pendule vertical

3) Hors équilibre: TMC appliqué à M de R' : $\frac{d\vec{L}_{O'}(M)}{dt}\Big|_{R'} = \vec{L}_{O'}(\vec{P}) + \vec{L}_{O'}(\vec{T}) + \vec{L}_{O'}(\vec{F}_{ie})$
 $\vec{L}_{O'}(M)_{R'} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M/R) = l\vec{e}_1 \wedge m l \dot{\theta} \vec{e}_2 = ml^2 \dot{\theta} \vec{e}_3$
 $\vec{L}_{O'}(\vec{T}) = \vec{0}$ $\vec{T}$ ne peut pas faire tourner $\vec{T}$ autour de O'
 $\vec{L}_{O'}(\vec{P}) = -mg \times l \sin\theta \vec{e}_3$
 $\vec{L}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = +ma \times l \cos\theta \vec{e}_3$
 d'où $ml^2 \ddot{\theta} = -mg l \sin\theta + m a l \cos\theta$

4) aux p'tits angles: $\sin\theta \approx 0$, $\cos\theta \approx 1$ $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{a}{l}$ $\vec{e}_p$, d'un O.H. de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{g/l}$

solution: $\theta(t) = \frac{a}{g} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ $\ddot{\theta}(t) = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$

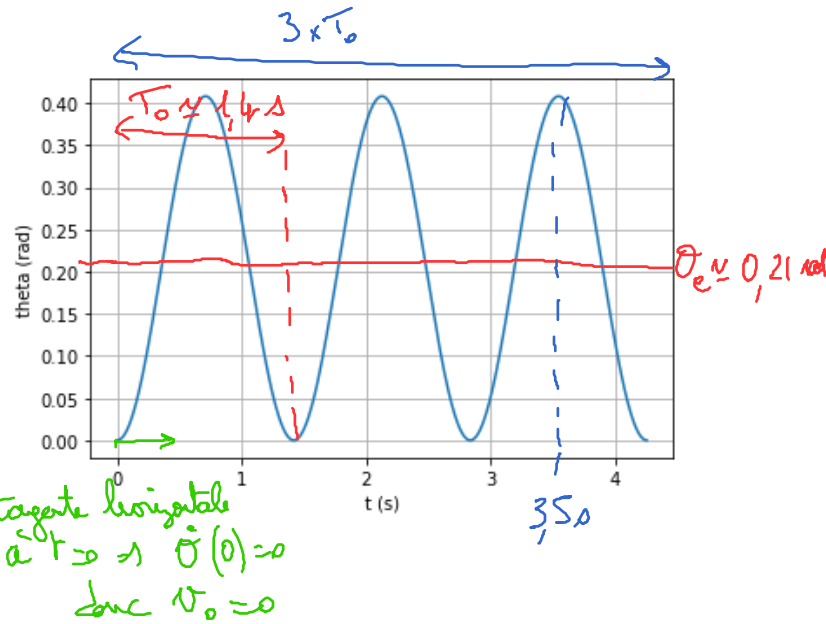
solution particulière
 CI: $\theta(t=0) = \theta_0 = \frac{a}{g} + A$
 $\dot{\theta}(t=0) = \frac{v_0}{l} = B\omega_0$
 soit $\theta(t) = \frac{a}{g} + \left(\theta_0 - \frac{a}{g}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{l\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

On donne le code et le résultat de son exécution:

```

1 g,a,l=9.8,..2.0.5
2 omega0=(a/g)**0.5
3 T0=2*np.pi/omega0
4 t=np.linspace(0,3.*T0,500)
5 theta0,v0=0,0
6 theta=a/g-a/g*np.cos(omega0*t)
7 plt.plot(t,theta)
8 plt.grid()
9 plt.xlabel('t(s)')
10 plt.ylabel('theta(rad)')
11 plt.show()

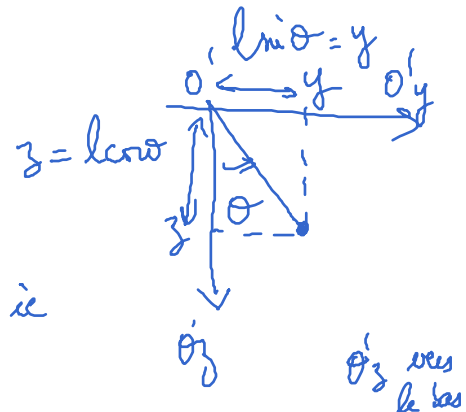
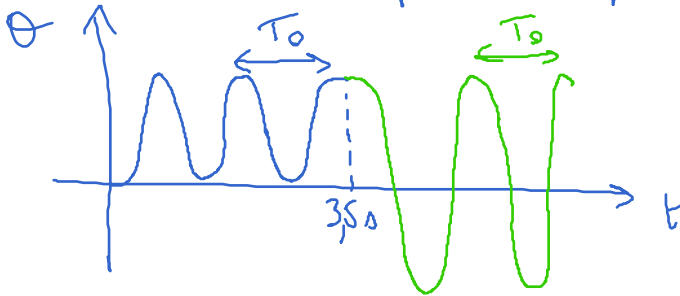
```



$$\theta_e = \frac{a}{g} \Rightarrow a = \theta_e \times g = 0.21 \times 9.8 = 2.0 \text{ ms}^{-2}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ donc } T_0^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \text{ soit } l = \frac{T_0^2 g}{4\pi^2} = \frac{1.4^2 \times 9.8}{4\pi^2} = 0.5 \text{ m}$$

A $t > 3.5 \text{ s}$, l'accélération du train s'annule donc R' est un ref. en translation rectiligne uniforme dans R donc R' galiléen. Le pendule suit son poids et la tension du fil on a : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$; ω_0 n'est pas modifié et le pendule oscille autour de la position d'équilibre verticale :



$$5) \delta W(\vec{F}_{ie}) = \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{OH} = m a \vec{j} \cdot d\vec{y} \vec{j} = m a dy = -dE_{pie}$$

$$\frac{dE_{pie}}{dy} = -ma \text{ soit } E_{pie} = -may = -ma l \sin \theta$$

$\vec{T}$ ne travaille pas car elle est $\perp$ au $m \vec{v}$ et $\vec{P}$ est conservatif : $E_{pps} = -mgy$
 soit $E_{pps} = -mgl \cos \theta$. Le système est conservatif $E_m = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} - m a l \sin \theta - mgl \cos \theta = \text{cte}$
 soit $\frac{dE_m}{dt} = ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - m a l \dot{\theta} \cos \theta + mgl \dot{\theta} \sin \theta = 0$ on retrouve : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{a}{l} \cos \theta$