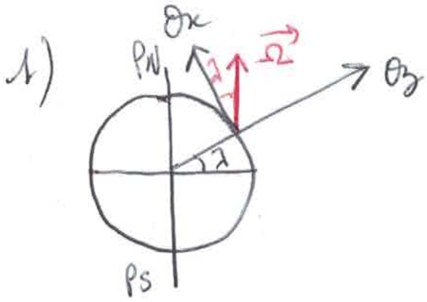
Déviation d'un obus

1)



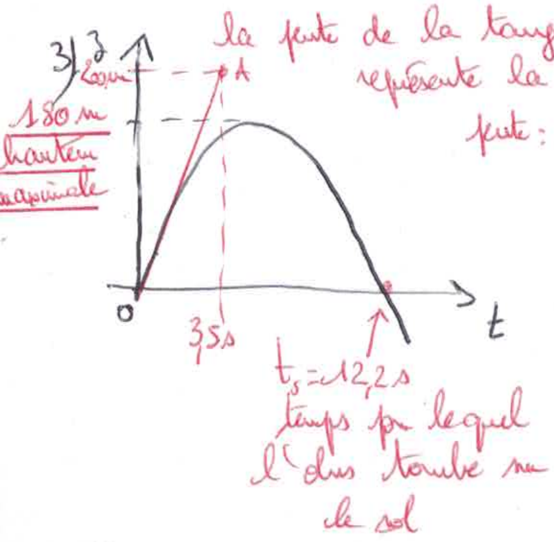
$\vec{\Omega} = \Omega\left(\cos\lambda\,\vec{e_x} + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)\vec{e_z}\right)$

$\vec{\Omega} = \Omega\cos\lambda\,\vec{e_x} + \Omega\sin\lambda\,\vec{e_z}$

AN : $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\times 3600} = 7{,}27.10^{-5}$ rad.s^{-1}

Période de rotation propre de la Terre

3)



la pente de la tangente à la courbe représente la vitesse selon (Oz)

pente : $\frac{z_A - z_0}{t_A - t_0} = \frac{200}{3{,}5} \simeq 57$ m.s^{-1}

On lit : $y(t_s = 12{,}2\,s) = 0{,}170$ m $= 17$ cm > 0

le point d'impact a pour coordonnées :

$(x_I = 0,\ y_I = 17$ cm $> 0,\ z_I = 0)$

l'obus est dévié vers l'ouest

On lit $\dot{x}(t=0) = 0$, $\dot{y}(t=0) = 0$ (tangente horizontale à la courbe à t=0), $\dot{z}(t=0) = 57$ m.s^{-1}

le vecteur vitesse initiale est donc $\vec{v_0} = v_0\,\vec{e_z}$ avec $v_0 = 57$ m.s^{-1}

4) Dans R_T galiléen, l'obus ne subit que son poids :

RFD appliquée à l'obus : $m\vec{a}_{/R_T} = m\vec{g}$ soit $\vec{a} = \vec{g}$ et $\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0$

sur (Ox) : $\underline{\dot{x} = 0}$ sur (Oy) : $\underline{\dot{y} = 0}$ sur (Oz) : $\underline{\dot{z} = -gt + v_0}$

---

5) Dans R_T non galiléen, l'obus subit son poids et la force d'inertie de Coriolis (la force d'inertie d'entraînement est contenue dans le poids).

RFD appliquée à l'obus : $m\vec{a}(M)_{/R_T} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}(M)_{/R_T}$

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_{/R_T} = \begin{vmatrix} \Omega\cos\lambda \\ 0 \\ \Omega\sin\lambda \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -gt + v_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega\cos\lambda(v_0 - gt) \\ 0 \end{vmatrix}$$

d'où $\vec{a}(M)_{/R_T} = \vec{g} - 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}(M)_{/R_T}$

on projette sur (Ox) : $\ddot{x} = 0$

sur (Oy) : $\ddot{y} = -2\Omega\cos\lambda(v_0 - gt)$

sur (Oz) : $\ddot{z} = -g$

On intègre par rapport au temps :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -2\Omega\cos\lambda\left(v_0 t - g\frac{t^2}{2}\right) \\ \dot{z} = -gt + v_0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = -2\Omega\cos\lambda\left(v_0\frac{t^2}{2} - g\frac{t^3}{3}\right) \\ z = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t \end{cases}}$$

---

6) L'obus arrive sur le sol pour $z = 0$ soit $\left(-g\frac{t}{2} + v_0\right)t = 0$

soit $t = 0$ point de départ et $\boxed{t_s = \frac{2v_0}{g}}$ point d'arrivée

d'où $y(t_s) = -2\Omega\cos\lambda\left(\frac{v_0}{2}\left(\frac{2v_0}{g}\right)^2 - \frac{g}{3}\left(\frac{2v_0}{g}\right)^3\right) = -2\Omega\cos\lambda\left(\frac{2v_0^3}{g^2} - \frac{8v_0^3}{3g}\right)$

soit $\boxed{y(t_s) = \frac{4}{3}\Omega\cos\lambda\,\frac{v_0^3}{g^2}}$ $\left[\Omega\cos\lambda\,\frac{v_0^3}{g^2}\right] = \text{rad.s}^{-1}\,\frac{m^3 s^{-3}}{m^2 s^{-4}} = m$

résultat homogène

$y(t_s) > 0$: c'est cohérent avec la courbe $y(t)$

AN : $y(t_s) = \frac{4}{3} \times 7{,}27.10^{-5} \times \cos 40 \times \frac{60^3}{9{,}81^2}$

$\underline{y(t_s) = 16{,}6\ \text{cm}}$ cohérent avec la courbe