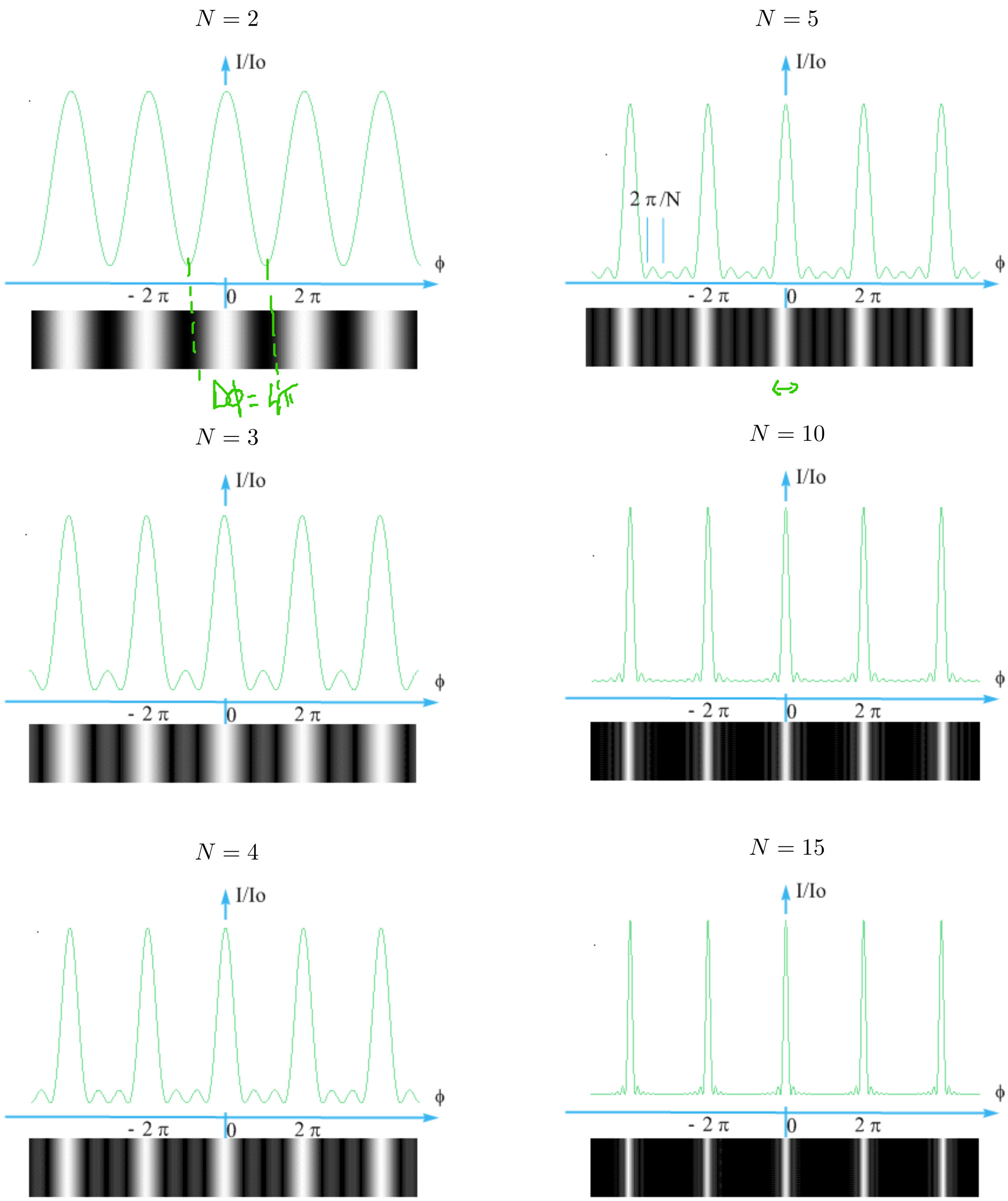
Chapitre OO4 : Interférences à N ondes cohérentes

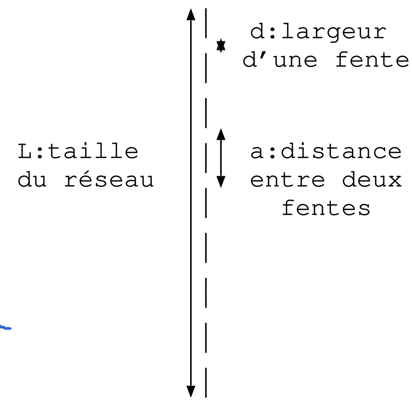
I. Caractéristiques des interférences à N ondes



Conclusion: Quand on augmente le nombre de fentes, la position des franges brillantes est inchangée. Les franges brillantes sont d'autant + lumineuses et d'autant + fines que N est grand.

II. **Le réseau de diffraction par transmission**

Un réseau est un système composé de N fentes (N très grand!). La distance entre deux fentes consécutives est notée a: c'est le pas du réseau.



Ordres de grandeur: pour $n = 300\ traits/mm$.

$a = \frac{1}{n} = \frac{10^{-3}}{300} = \frac{1}{0,3} \cdot 10^{-6} = 3,3\ \mu m$

$L \simeq$ qqs cm

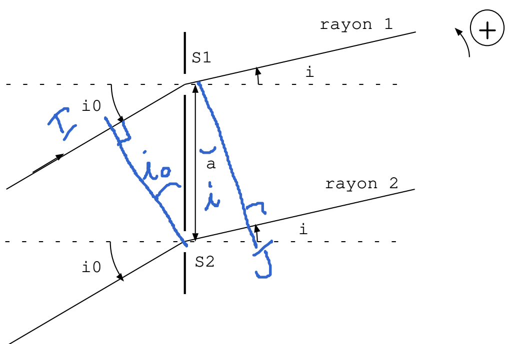
$N =$ qqs milliers puisqu'il y a 300 traits/mm soit 3000 fentes/cm

1. *Formule des réseaux:*

La lumière incidente diffracte à travers les différentes fentes du réseau. Le réseau est éclairé par une onde plane et on observe sur un écran loin du réseau. On réalise ici des interférences à N ondes qui sont caractérisées par des franges brillantes très fines et très intenses.

Attention : dans le réseau, on ne se limite pas au petits angles.

Attention: sur le dessin les angles i_0 et i doivent être positifs mais la démonstration reste valable pour i et i_0 négatifs.



Expression de la différence de marche: $\delta_{2/1}(M) = (S_\infty S_2 M) - (S_\infty S_1 M)$

$\delta_{21}(M) = \cancel{(S_\infty S_2)} + (S_2 J) + \cancel{(JM)} - \cancel{(S_\infty I)} - (IS_1) - \cancel{(S_1 M)}$

M se comporte comme une source par principe de retour inverse de la lumière.

Entre une source et une surface d'onde le chemin optique est constant donc;

$(S_\infty S_2) = (S_\infty I)$ et $(S_1 M) = (JM)$

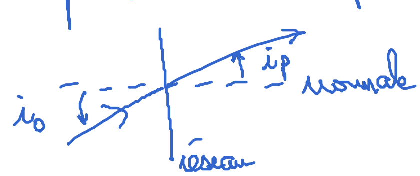
$\sin i_0 = \frac{IS_1}{a}$ $\quad \sin i = \frac{S_2 J}{a}$

$\delta_{21}(M) = S_2 J - IS_1 = a(\sin i - \sin i_0)$

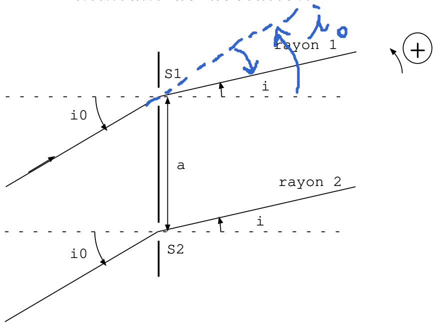
On observe des interférences constructives pour: des ordres d'interférences entiers $\delta = p\lambda$

Conclusion: la formule des réseaux: $\boxed{\sin i_p - \sin i_0 = p\frac{\lambda}{a}}$

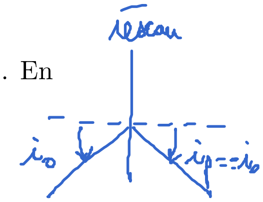
a : distance entre 2 fentes
λ : longueur d'onde
p : ordre d'interférences



2. *Minimum de déviation*



Expression de l'angle de déviation: $\boxed{D = -i_0 + i}$



Lorsqu'on fait varier i_0, l'angle de déviation admet un minimum noté D_m. Au minimum, on a $i_p = -i_0$. En déduire que $\sin i_0 = \frac{-p\lambda}{2a}$ et $\sin(\frac{D_m}{2}) = \frac{p\lambda}{2a}$. Faire un schéma pour illustrer le minimum de déviation.

$D_{min} = -i_0 + i_p = -2i_0 = +2i_p$

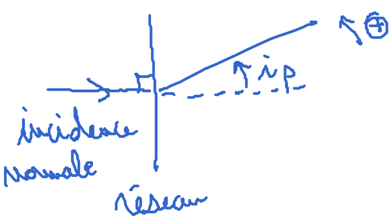
$\sin i_p - \sin i_0 = p\frac{\lambda}{a}$ donne $2\sin i_p = p\frac{\lambda}{a}$ ou $2\sin i_0 = -p\frac{\lambda}{a}$

Soit $i_p = \frac{D_m}{2}$ et $\sin i_p = \frac{p\lambda}{2a}$ donc $\boxed{\sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = \frac{p\lambda}{2a}}$ relation qui permet en TP de mesurer a

3. *Applications de cours*

rouge

Exemple 1: Soit un réseau éclairé sous incidence normale avec un laser de longueur d'onde λ. Données : $\lambda = 632\ nm$ et $n = 700\ traits/mm$. Déterminer les ordres visibles et les angles correspondant aux directions des franges brillantes.



$-\pi/2 \leq i_p \leq +\pi/2$ et $\sin i_p = p\frac{\lambda}{a}$

$a = \frac{10^{-3}}{700} = 1,43\,\mu m$

pour $i_p = \pi/2$: $p = \frac{a\sin(\pi/2)}{\lambda} = 2,26$

$i_p = -\pi/2$: $p = \frac{a\sin(-\pi/2)}{\lambda} = -2,26$

p	-2	-1	0	$+1$	$+2$
$i_p = \sin^{-1}\left(\frac{p\lambda}{a}\right)$	$-62,1°$	$-26,2°$	$0°$	$+26,2°$	$62,1°$

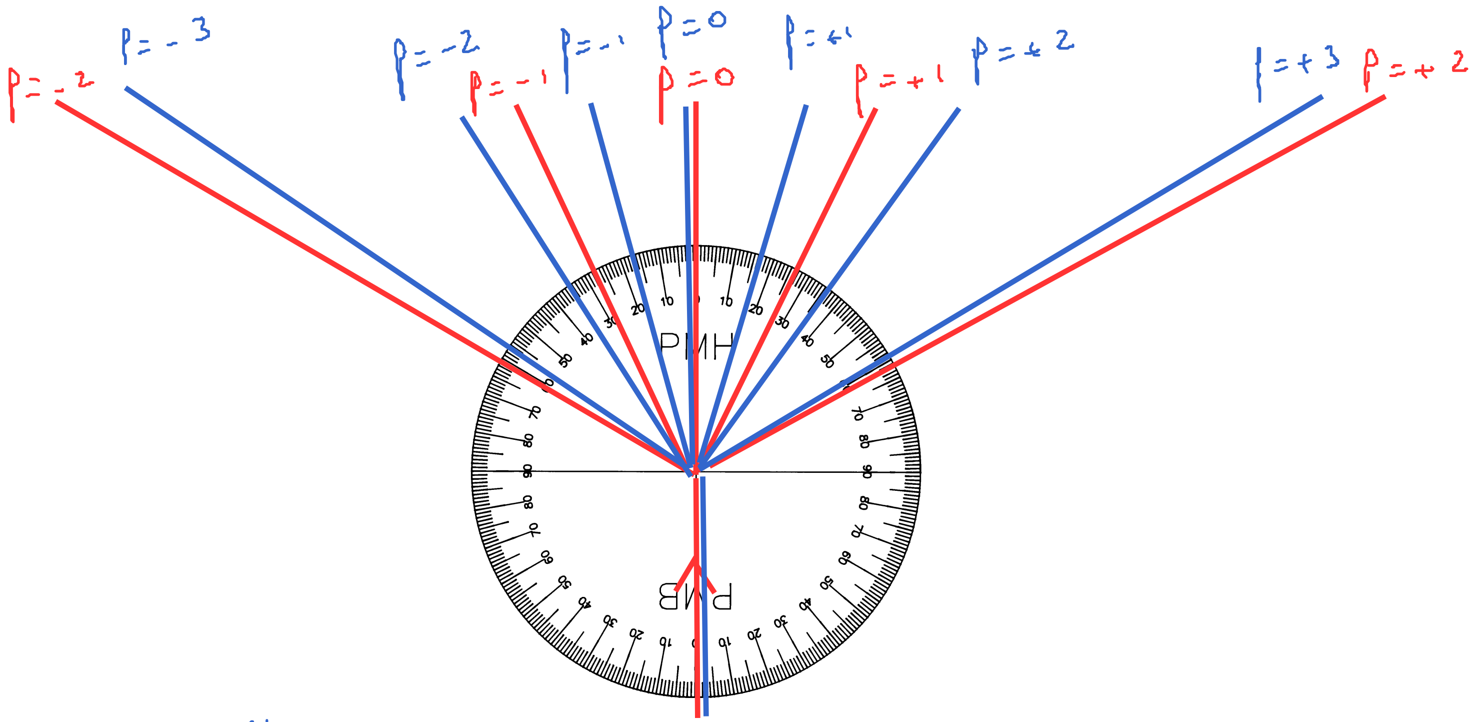
Faire de même pour un laser de longueur d'onde $\lambda' = 410\ nm$. (bleu)

pour $i_p = +\pi/2$: $p = \frac{a\sin(\pi/2)}{\lambda'} = 3,48$

$i_p = -\pi/2$ $p = \frac{a\sin(-\pi/2)}{\lambda'} = -3,48$

p	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
$i_p = \sin^{-1}\left(\frac{p\lambda}{a}\right)$	$-59,3°$	$-35°$	$-16,6°$	0	$+16,6°$	$+35°$	$+59,3°$

Porter les résultats obtenus sur le schéma suivant en précisant ce que l'on observe sur l'écran: si le réseau est éclairé par le laser rouge, le laser bleu ou par de la lumière blanche



Conclusion: l'ordre 0 n'est pas dispersif

les ordres non nuls sont dispersifs : la lumière ne suit pas le même chemin en fonction de sa longueur d'onde.

Les ordres peuvent parfois se chevaucher

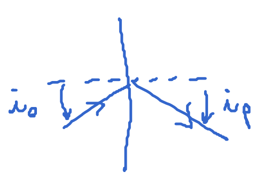
Exemple 2: Soit un réseau de 600 traits par millimètre. $a = \frac{10^{-3}}{600} = 1{,}67\ \mu m$

Déterminer la déviation angulaire à l'ordre 2 pour $\lambda = 589\ nm$ et $i_0 = -20^0$.

$\sin i_p - \sin i_0 = p\frac{\lambda}{a}$ donc $i_p = \sin^{-1}\left(\sin i_0 + p\frac{\lambda}{a}\right) = 21{,}3°$

$D = -i_0 + i_p = 41{,}3°$

Déterminer le minimum de déviation pour $\lambda = 589\ nm$ et $p = 3$. Sur un schéma représenter le réseau, sa normale, le rayon incident et le rayon diffractée dans ce cas.



$\boxed{i_p = -i_0}$

$\sin i_p - \sin i_0 = p\frac{\lambda}{a}$ soit $\sin i_p = p\frac{\lambda}{2a}$

$i_p = \sin^{-1}\left(\frac{p\lambda}{2a}\right) = 31{,}9°$

$D_m = 2 i_p = 63{,}8°$

Déterminer la plage d'angle d'incidence pour lesquels l'ordre -4 est observable pour $\lambda = 589\ nm$.

$\sin i_p - \sin i_0 = p\frac{\lambda}{a}$ $\quad \sin i_0 = \sin i_p - p\frac{\lambda}{a}$

pour $i_p = 90°$; $\sin i_0 = 2{,}4$

pour $i_p = -90°$: $\sin i_0 = 0{,}41 \to i_0 = 24{,}2°$

Exercice 3: Un réseau plan éclairé en lumière monochromatique $\lambda = 500\ nm$ présente un minimum de déviation dans le premier ordre pour $D_m = 60^0$. Calculer le nombre de traits par millimètre du réseau.

$D_m = 2i_p = -2i_0$ car $i_p = -i_0$

$2\sin i_p = -2\sin i_0 = p\frac{\lambda}{a}$

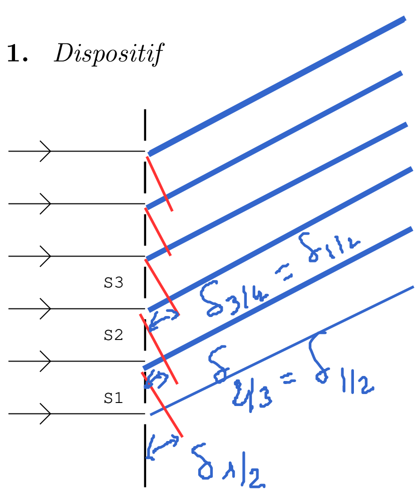
$2\sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = p\frac{\lambda}{a}$

d'où $a = \frac{p\lambda}{2\sin\left(\frac{D_m}{2}\right)} = 0{,}5\ \mu m = 0{,}5.10^{-3}\ mm$

$n = \frac{1}{a} = \frac{1}{0{,}5.10^{-3}} = 2000$ traits/mm

III. Interférences à N ondes cohérentes

1. *Dispositif*



Les N sources sont cohérentes, les ondes issues de ces N sources secondaires arrivent en M avec:

* la même amplitude a_0
* la même fréquence f
* la même intensité I_0

On note $\phi_{2/1}(M) = \phi(M) = \phi_{3/2} = \phi_{4/3} = \phi_{5/4} \ldots$

et $\phi_{3/1}(M) = 2\phi$, $\phi_{4/1}(M) = 3\phi$, $\phi_{5/1}(M) = 4\phi$, ...

2. *Recherche de l'intensité en M*

Les ondes sont cohérentes donc l'amplitude de l'onde s'écrit: $a(M,t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(M,t)$

$a(M,t) = \underbrace{a_0\cos(\omega t)}_{\text{onde issue de } S_1} + a_0\cos(\omega t+\phi) + a_0\cos(\omega t+2\phi) + \dots + a_0\cos(\omega t+(N-1)\phi)$

prise comme origine des phases

En notation complexe: $\underline{a}(M) = a_0 e^{j\omega t}\left(1 + e^{j\phi} + e^{2j\phi} + \dots + e^{j\phi(N-1)}\right)$ $(\cos \leftrightarrow e^{j})$

D'où l'intensité $I(M) = K\langle a(M,t)^2\rangle$

en notation complexe: $I(M) = \frac{K}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{a}(M,t)\times \underline{a}^*(M,t)\right)$

Le calcul de l'intensité se fait avec la méthode des complexes, on trouve:

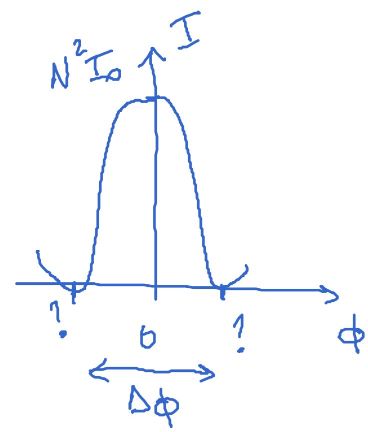
$$I(M) = I_0\frac{\sin^2(\frac{N\phi}{2})}{\sin^2(\frac{\phi}{2})}$$

résultat admis, à ne pas connaître par cœur

Intensité pour $\phi \approx 0$:

$$\boxed{I(\phi\approx 0)} = I_0\frac{\left(\frac{N\phi}{2}\right)^2}{\left(\frac{\phi}{2}\right)^2} = \boxed{N^2 I_0}$$

: c'est l'intensité des franges brillantes ($\phi = 0$ c'est $p = 0$: frange centrale brillante)



Valeurs de ϕ les plus proches de $\phi = 0$ pour lesquelles l'intensité s'annulent:

je résous $I(\phi) = 0$ soit $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right) = 0$

d'où $\frac{N\phi}{2} = \pm\pi$ et $\phi = \pm\frac{2\pi}{N}$ et $\boxed{\Delta\phi = \frac{4\pi}{N}}$

On retrouve le fait que plus N est grand, plus les franges brillantes sont intenses ($I_{max} = N^2 I_0$) et plus elles sont fines ($\Delta\phi = \frac{4\pi}{N}$)