TD diffusion de particules

I. Mesure du coefficient de diffusion d'une encre

On réalise une expérience au cours de laquelle une tache d'encre est déposée dans un cristallisoir rempli de glycérol et on mesure la largeur d de la tache au cours du temps t. Les résultats de l'expérience sont donnés dans le tableau suivant.

t (s)	10	20	30	50	90
d (cm)	9	16	20	27	37

Le but de cette expérience est de déterminer le coefficient de diffusion de l'encre dans le glycérol.

Rappeler le lien en ordre de grandeur entre d, t et D.

Compléter les instructions 1,2,3 et 4 du code python.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

Lt=np.array([10,20,30,50,90])
Ld=np.array([9,16,20,27,37])
x=instruction(1)
y= instruction(2)
a,b=np.polyfit(x,y,1) #on trouve les valeurs de
# a et b telles que y=ax+b
D=instruction(3)
plt.plot(x,a*x+b) # on trace la droite théorique
# y=ax+b
plt.plot(instruction(4),'*') # on trace la droite
# avec les points expérimentaux
plt.grid()
plt.show()
```

Python renvoie: $D = 0.0016047499999999996$. Commenter.

II. Coefficient de diffusion du CO_2 dans l'air

On souhaite déterminer le coefficient de diffusion du dioxyde de carbone dans l'air. On observe la diffusion unidirectionnelle du dioxyde de carbone dans l'air, en régime stationnaire, à l'intérieur d'un tube de longueur $L = 0,25\ m$ et de section $S = 15\ cm^2$, d'axe Ox. La densité du courant de dioxyde de carbone est uniforme et vaut $j_D = 5,1.10^{17}\ SI$. La densité particulaire du dioxyde de carbone est imposée aux deux extrémités : $n(0) = 1,4.10^{22}\ SI$ et $n(L) = 8,6.10^{21}\ SI$.

1. Rappeler les unités de j_D et n.

2. Rappeler la loi de Fick et préciser son sens physique. En déduire l'expression de $n(x)$ en fonction de $n(0)$, j_D, x et D.

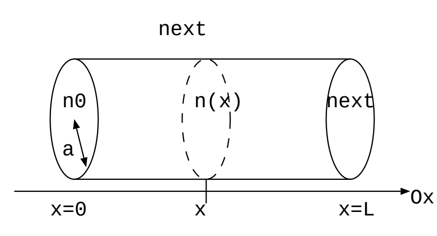
3. En déduire l'expression de D en fonction des données. Calculer D et commenter.

4. Calculer le nombre de molécules de dioxyde de carbone traversant une section du tube en une minute.

Réponses: 2- $n(x) = n_0 - \dfrac{j_D x}{D}$ *3-* $D = 2,4.10^5\ m^2.s^{-1}$ *4-* $4,6.10^{16}$ *particules*

III. Diffusion de particules par une paroi poreuse

Soit un long cylindre d'axe Ox, de longueur L et de rayon a contenant des particules qui diffusent selon l'axe du cylindre avec un coefficient de diffusion D. On note $\overrightarrow{j_D}(x,t) = j_D(x,t)\overrightarrow{e_x}$ le vecteur densité de courant de diffusion et $n(x,t)$ la densité particulaire.



Les particules peuvent s'échapper au travers de la surface latérale du tube cylindrique avec un vecteur densité de courant $j(x,t) = K(n(x,t) - n_{ext})$.

1. On considère un système élémentaire compris entre x et $x + dx$.

1.a. On note $dN(t)$ et $dN(t + dt)$ les nombres de neutrons présents dans le système aux instants t et $t + dt$. Exprimer $dN(t)$ et $dN(t + dt)$ en fonction des données.

1.b. On note δN_e et δN_s le nombre de particules qui entrent et qui sortent du système selon Ox entre t et $t + dt$. On note δN_l le nombre de particules perdues par la surface latérale entre t et $t + dt$.

Exprimer δN_e, δN_s et δN_l en fonction des données.

1.c. En déduire le bilan local de conservation du nombre de particules.

Dans la suite on se place en régime stationnaire. On note $n(x)$, $j_D(x)$ et $j(x)$, la densité particulaire, la densité de courant de diffusion et la densité de courant latérale. On note $n_0 = n(x=0)$ et $n_{ext} = n(x=L)$. Ces densités volumiques de particules aux extrémités du cylindre sont maintenues constantes.

2. Simplifier le bilan local de conservation du nombre de particules.

3. Ecrire la loi de Fick et en déduire que $n(x)$ vérifie l'équation différentielle de la forme $\dfrac{d^2n}{dx^2} - \dfrac{n}{\delta^2} = -\dfrac{n_{ext}}{\delta^2}$. Exprimer δ en fonction de D, a et K. En déduire $n(x)$.

4. Cet exercice peut être formulé différemment en remplaçant les questions 1 et 2 par:

On se place en régime stationnaire.

On considère un système élémentaire compris entre x et $x + dx$.

4.a. On note δN_e et δN_s le nombre de particules qui entrent et qui sortent du système selon Ox entre t et $t + dt$. On note δN_l le nombre de particules perdues par la surface latérale entre t et $t + dt$.

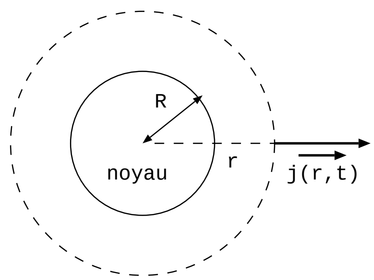
Exprimer δN_e, δN_s et δN_l en fonction des données.

4.b. En déduire le bilan local de conservation du nombre de particules.

Réponse: 1c- $\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{dj_D}{dx} - \dfrac{2K}{a}(n(x) - n_{ext})$

IV. A l'extérieur d'un noyau sphérique

Un noyau sphérique, de centre O et de rayon R, est le siège d'une production de neutrons par réaction nucléaire. A l'extérieur du noyau, il n'y a ni production, ni absorption de neutrons, il y a juste de la diffusion de neutrons. On note D le coefficient de diffusion de neutrons à l'extérieur du noyau, $n(r,t)$ la densité volumique de neutrons et $\overrightarrow{j_D} = j_D(r,t)\overrightarrow{e_r}$, le vecteur densité volumique de courant de neutrons en coordonnées sphériques.



On considère à l'extérieur du noyau un système élémentaire compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$.

1. Exprimer le volume de ce système élémentaire.

2. On note δN_e et δN_s, le nombre de neutrons qui entrent et qui sortent du système entre t et $t + dt$. On note $dN(t)$ et $dN(t + dt)$ les nombres de neutrons présents dans le système aux instants t et $t + dt$.

Exprimer δN_e, δN_s, $dN(t)$ et $dN(t + dt)$ en fonction des données.

3. En déduire le bilan local de conservation du nombre de neutrons.

4. En déduire que $j_D(r) = \dfrac{A}{r^n}$ en régime stationnaire avec A une constante que l'on ne cherche pas à exprimer. Donner la valeur numérique de n.

5. Cet exercice peut être formulé différemment en remplaçant les questions 2,3 et 4 par:

On se place en régime stationnaire.

On note δN_e et δN_s, le nombre de neutrons qui entrent et qui sortent du système entre t et $t + dt$.

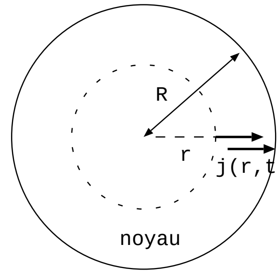
Exprimer δN_e et δN_s en fonction des données.

En déduire le bilan local de conservation du nombre de neutrons.

Réponses: 3- $\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 j_D(r))$ *4-* $n = 2$

V. A l'intérieur d'un noyau sphérique

Un noyau sphérique, de centre O et de rayon R, est le siège d'une production de neutrons par réaction nucléaire. On note p le nombre de neutrons produits par unité de volume et de temps. On note D le coefficient de diffusion de neutrons dans le noyau, $n(r,t)$ la densité volumique de neutrons et $\overrightarrow{j_D} = j_D(r,t)\overrightarrow{e_r}$, le vecteur densité volumique de courant de neutrons en coordonnées sphériques.



On considère à l'intérieur du noyau un système élémentaire compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$.

1. Exprimer le volume de ce système élémentaire.

2. On note δN_e, δN_s et δN_p, le nombre de neutrons qui entrent et qui sortent du système, et le nombre de neutrons produits entre t et $t+dt$. On note $dN(t)$ et $dN(t+dt)$ les nombres de neutrons présents dans le système aux instants t et $t+dt$.

Exprimer δN_e, δN_s, δN_p, $dN(t)$ et $dN(t+dt)$ en fonction des données.

3. En déduire le bilan local de conservation du nombre de neutrons.

4. On se place ici en régime stationnaire.

4.a. Simplifier l'équation de conservation du nombre de neutrons.

4.b. Ecrire la loi de Fick en rappelant son sens physique et en déduire que $\dfrac{d}{dr}(r^2\dfrac{dn}{dr}) = -\dfrac{pr^2}{D}$.

4.c. On note n_0 la densité de neutrons au centre du noyau. Exprimer $n(r)$ en fonction de p, r, D et n_0. Exprimer la densité de neutrons à la surface du noyau.

5. Cet exercice peut être formulé différemment en remplaçant les questions 2 et 3 par:

On se place en régime stationnaire.

On note δN_e, δN_s et δN_p, le nombre de neutrons qui entrent et qui sortent du système, et le nombre de neutrons produits entre t et $t+dt$.

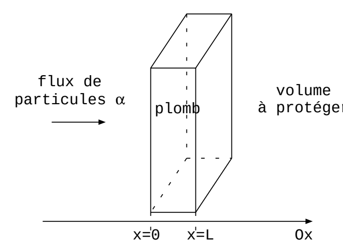
Exprimer δN_e, δN_s et δN_p en fonction des données.

En déduire le bilan local de conservation du nombre de neutrons.

Réponses: 3- $\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 j_D(r)) + p$ *4c-* $n(r) = n_0 - \dfrac{pr^2}{6D}$

VI. Protection nucléaire

Pour protéger un lieu (contenu dans demi espace $x > L$) d'un flux ϕ constant de particules α en $x = 0$, on place entre $x = 0$ et $x = L$ un écran de plomb de surface S. Un volume élémentaire dV de plomb est capable d'absorber durant une durée dt une quantité $\delta N_{abs} = \dfrac{n(x)}{\tau}dtdV$ où $n(x)$ est la densité particulaire de particules α et τ une constante positive. La protection n'est pas parfaite car les particules α diffusent dans le plomb avec un coefficient de diffusion D.



1. Déduire d'un bilan de matière en régime stationnaire sur un système infinitésimale de plomb de surface S compris entre x et $x+dx$ que $\dfrac{dj_D(x)}{dx} = -\dfrac{n(x)}{\tau}$.

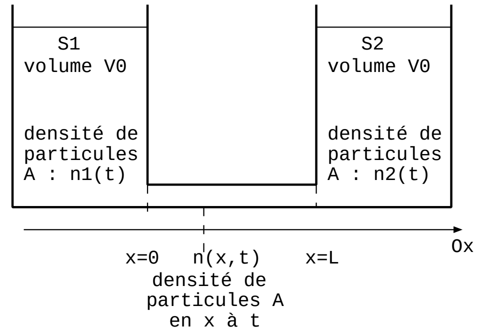
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la densité particulaire $n(x)$ de particules α dans le plomb en fonction intervenir $\delta = \sqrt{D\tau}$. Préciser l'unité de δ.

3. ϕ est le nombre de particules α qui traversent la surface de plomb par unité de temps en $x = 0$. Ecrire la relation entre $j_D(x=0)$ et ϕ. On note $n_0 = n(x=0)$. Déduire de ces deux conditions aux limites en $x = 0$ l'expression de $n(x)$.

Réponse: $n(x) = (n_0 - \frac{\phi\delta}{SD})\frac{e^{\frac{x}{\delta}}}{2} + (n_0 + \frac{\phi\delta}{SD})\frac{e^{\frac{-x}{\delta}}}{2}$.

VII. **Transfert de soluté**

On considère deux colonnes cylindriques S_1 et S_2, géométriquement identiques, de rayon R, la première contient une solution aqueuse d'un soluté A de densité moléculaire n_0 et la deuxième de l'eau pure. Les liquides occupent le même volume V_0 dans les deux colonnes. Ces deux colonnes sont mises en contact à $t = 0$ par l'intermédiaire d'un tube cylindrique, de longueur L et de section S rempli d'eau pure et dont le volume est très inférieur à celui des colonnes de liquide.



Les deux colonnes sont agitées en permanence de sorte que les densités moléculaires $n_1(t)$ et $n_2(t)$, en soluté A dans les deux colonnes sont supposées uniformes, en revanche il n'y a pas de convection dans le tube. On $n(x,t)$ la concentration en A dans le tube et D le coefficient de diffusion de A dans l'eau.

1. Donner l'équation différentielle à laquelle obéit $n(x,t)$.

2. On fait l'approximation des régimes permanents dans le tube, cela signifie que $n(x,t)$ varie très lentement au cours du temps donc on suppose que $n(x,t)$ vérifie l'équation de diffusion en régime stationnaire. Exprimer alors $n(x,t)$ en fonction de $n_1(t)$, $n_2(t)$, L et x.

3. En déduire le nombre de molécules de soluté A qui traversent la section S du tube en $x = 0$ pendant dt ainsi que le nombre de molécules de soluté A qui traversent la section S du tube en $x = L$.

4. Déduire d'un bilan de matière entre les instants t et $t + dt$ aux molécules de soluté A dans le récipient $S1$ que $\dfrac{dn_1}{dt} = -DS\dfrac{n_1 - n_2}{V_0}$.

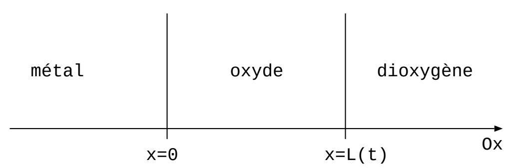
5. Donner la relation simple entre $n_1(t)$, $n_2(t)$ et n_0. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $n_1(t)$ et exprimer $n_1(t)$. En déduire $n_2(t)$.

6. Calculer le temps caractéristique de variation du nombre de molécules de soluté A dans les récipients et le temps caractéristique de diffusion du soluté dans le tube. Commenter. Données : $D = 1,5.10^{-9}\ m^2/s$, $V_0 = 40\ cm^3$, $L = 0,5\ cm$ et $S = 1\ mm^2$.

Réponses : $n(x,t) = \dfrac{n_2 - n_1}{L}x + n_1$, $\dfrac{dn_1}{dt} = DS\dfrac{n_2 - n_1}{V_0 L}$, $n_1 + n2 = n_0$, $n_1(t) = \dfrac{n_0}{2}(1 + e^{-t/\tau})$ *avec* $\tau = \dfrac{V_0 L}{2DS}$, $\tau = 770\ jours$

VIII. **Oxydation d'un métal**

Si l'on met une surface métallique (métal M) en présence d'oxygène, il se forme une pellicule d'oxyde dont l'épaisseur $L(t)$ croit au cours du temps, les atomes M diffusant dans l'oxyde avec un coefficient de diffusion D supposé constant.



Si l'on admet que la diffusion est le phénomène limitant, les concentrations en métal aux deux interfaces de l'oxyde peuvent être considérées comme indépendantes du temps. On note c_0 est le nombre d'atomes de métal par unité de volume en $x = 0$ et c_1 est le nombre d'atomes de métal par unité de volume en $x = L(t)$

1. Soit j_D la densité de courant d'atomes dans l'oxyde. Montrer que si l'on considère le régime quasi-stationnaire, j_D est indépendant de x et l'exprimer en fonction de C_0, C_1 et $L(t)$.

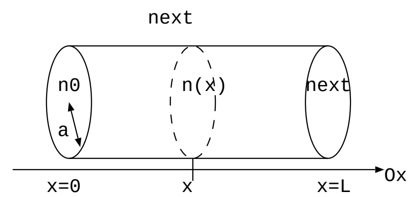
2. L'épaisseur de la couche d'oxyde croit avec l'arrivée d'atomes de métal à l'interface oxyde/dioxygène. On désigne par Ω le volume d'oxyde formé par l'atome de métal atteignant l'interface. Montrer que $L(t)$ vérifie l'équation différentielle $\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{\Omega D(C_0 - C_1)}{L}$ et déterminer $L(t)$ si $L(0) = 0$.

3. Les hypothèses précédentes supposent un régime quasi-stationnaire. Etablir en fonction de $L(t)$ et D un temps caractéristique de diffusion, puis en fonction de $L(t)$, C_0, C_1, D et Ω un temps caractéristique de croissance de la couche. En déduire un critère permettant de considérer le régime comme quasi-stationnaire.

Réponses : 1- $j_D = \dfrac{D(C_0 - C_1)}{L(t)}$, *2-* $L(t) = \sqrt{2\Omega D(C_0 - C_1)t}$

IX. **Diffusion de particules par une paroi poreuse**

Soit un long cylindre d'axe Ox, de longueur L et de rayon a contenant des particules qui diffusent selon l'axe du cylindre avec un coefficient de diffusion D. On note $n_0 = n(x = 0)$ et $n_{ext} = n(x = L)$. Ces densités volumiques de particules aux extrémités du cylindre sont maintenues constantes. On note $\overrightarrow{j_D}(x) = j_D(x)\overrightarrow{e_x}$ le vecteur densité de courant de diffusion.



Les particules peuvent s'échapper au travers de la surface latérale du tube cylindrique avec un vecteur densité de courant $j(x) = K(n(x) - n_{ext})$. On se place en régime stationnaire.

1. Ecrire le bilan de particules au système élémentaire compris entre x et $x + dx$.

2. Rappeler la loi de Fick et en déduire que $n(x)$ vérifie l'équation différentielle de la forme $\dfrac{d^2n}{dx^2} - \dfrac{n}{\delta^2} = -\dfrac{n_{ext}}{\delta^2}$. Exprimer δ en fonction de D, a et K. Préciser l'unité de δ.

3. En déduire $n(x)$ dans l'hypothèse où L est très grand soit $n(L \to \infty) = n_{ext}$.

4. Exprimer le nombre de particules qui s'échappent au travers de la surface latérale du tube cylindrique de longueur L pendant le temps Δt.

Réponse: $n(x) = n_{ext} + (n_0 - n_{ext})e^{-x/\delta}$ *avec* $\delta = \sqrt{\frac{Da}{2K}}$