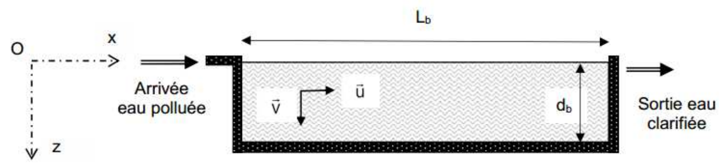
DM 3 de physique

I. Décantation pour le traitement des eaux

La clarification par décantation est une des étapes réalisées dans le traitement des eaux des stations d'épuration. Elle consiste à éliminer les particules polluantes en suspension dans l'eau polluée. L'eau polluée, c'est-à-dire chargée en particules non désirées, circule en continu dans le bassin de décantation, à faible vitesse horizontale $\vec{u}$. Les particules ont le temps de se déposer au fond du bassin et l'eau de sortie est ainsi clarifiée.



Le bassin de décantation est de longueur L_b et de profondeur d_b, sa largeur est indifférente. On note respectivement η et ρ_e la viscosité dynamique et la masse volumique de l'eau polluée. η et ρ_e sont supposées constantes.

On définit le repère $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ lié au bassin. L'axe Oz est vertical descendant. Le niveau d'entrée de l'eau dans le bassin correspond à la cote $z = 0$.

On suppose que les particules polluantes sont sphériques, de rayon R, et qu'elles sont soumises à la force de frottement fluide: $\vec{F} - 6\pi\eta R\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse des particules.

On note ρ_0 la masse volumique des particules polluantes, supposée constante. On a: $\rho_0 > \rho_e$.

On considère que l'eau arrive en amont du bassin avec une densité en particules polluantes notée N_0.

Décantation statique

Dans un premier temps, l'eau ne circule pas horizontalement, $\vec{u} = \vec{0}$ et les particules polluantes qu'elle contient chutent verticalement. Compte tenu des phénomènes de transport des particules polluantes dans le bassin, la densité en particules polluantes n'est pas uniforme sur la hauteur du bassin. Elle dépend de la profondeur z. Dans le bassin, on note $n(z)$ la densité en particules polluantes à l'altitude z et n_0 la valeur associée à l'altitude $z = 0$, soit $n_0 = n(z = 0)$.

1. A partir de l'équation différentielle du mouvement, issue de la seconde loi de Newton, établir, en fonction de ρ_0, ρ_e, R, η et de l'accélération g de la pesanteur, la vitesse limite $\vec{v_l} = v_l\vec{e_z}$ atteinte par ces particules. Quel est le signe de v_l ? Exprimer en fonction de ρ_0, R et η, le temps caractéristique τ_c d'établissement de cette vitesse limite.

On supposera par la suite que la constante de temps τ_c est très faible devant le temps de sédimentation (i.e. le temps de chute dans le bassin) de sorte que le mouvement des particules est considéré comme uniforme à la vitesse $\vec{v_l}$.

2. Cette chute des particules est à l'origine d'un courant convectif vertical des particules. On note: $\vec{j} = j(z)\vec{e_z}$, le vecteur densité de courant de particules associé. Préciser l'unité de $\vec{j}$. Puis exprimer le vecteur $\vec{j}$ en fonction de $n(z)$ et de $\vec{v_l}$.

En plus du courant précédent, on observe l'existence d'un second courant qui résulte d'un phénomène de diffusion. On note D le coefficient de diffusivité des particules dans l'eau et $\vec{j_D} = j_D(z)\vec{e_z}$ le vecteur densité de courant de particules associé à ce second courant.

3. Rappeler la loi de Fick et préciser les unités des grandeurs qui interviennent. Justifier qualitativement l'existence de ce courant de diffusion. Préciser s'il est ascendant ou descendant en déduire le signe de $j_D(z)$.

4. En régime permanent, ces deux courants se compensent. En déduire, en fonction de n_0, D et v_l, l'expression de la densité de particules $n(z)$. Représenter graphiquement la fonction $n(z)$ en fonction de z.

5. On note l la largeur du bassin selon Oy.

Exprimer en fonction de N_0, L_b, d_b et l le nombre total de particules polluantes dans le bassin.

Exprimer ce même nombre de particules en utilisant la fonction $n(z)$.

Par conservation du nombre de particules dans le bassin, exprimer n_0 en fonction de N_0, D, d_b et de v_l.

6. Définir en fonction de D, d_b et de v_l, un temps caractéristique τ_s de sédimentation, ainsi qu'un temps caractéristique τ_D de diffusion des particules sur la hauteur du bassin.

A quelle condition portant sur τ_s et τ_D, la décantation statique permet-elle une clarification de l'eau ?

Clarification dynamique de l'eau polluée

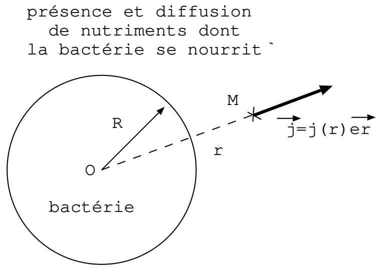
Dans un second temps, l'eau polluée est mise en mouvement et s'écoule avec une vitesse horizontale constante $\vec{u}$. Un aspirateur situé au fond du bassin aspire maintenant les particules polluantes. Un modèle simple considère que le mouvement des particules polluantes est la combinaison d'un mouvement horizontal de vitesse $\vec{u}$ dû à l'entraînement de l'eau et d'un mouvement vertical de chute à la vitesse constante $\vec{v_l}$ déterminée précédemment dans l'étude de la décantation statique. L'eau sera clarifiée si les particules polluantes introduites à l'entrée du bassin ont le temps de tomber au fond avant que l'eau d'entraînement, injectée à l'entrée du bassin en $x = 0$, ne soit parvenue à l'autre extrémité de sortie du bassin, située en $x = L_b$.

7. Définir en fonction de L_b et u, un temps de traversée τ_t du bassin. À quelle condition, portant sur τ_t et τ_s, la clarification dynamique est-elle efficace ?

II. **Diffusion de nutriments autour d'une bactérie**

Dans ce problème, nous allons nous intéresser à un aspect de la biophysique des bactéries, s'articulant autour de leur capacité à assurer la présence d'une quantité suffisante de nutriments nécessaire à leur métabolisme dans leur environnement. Nous allons voir qu'une bactérie immobile ne peut pas excéder une taille critique.

Nous assimilons la bactérie à une sphère de rayon R et nous supposons qu'elle absorbe des nutriments à sa surface. Dans le milieu extérieur, les nutriments migrent de façon diffusive, avec un coefficient de diffusion D. Nous appelons $n(r)$ la densité particulaire en nutriments en un point M, placé à la distance r du centre de la bactérie. On note n_∞ la densité particulaire en nutriments très loin de la bactérie. Nous appelons $\vec{j} = j(r)\vec{e_r}$ le vecteur densité de courant de nutriments à l'extérieur de la bactérie.



1. Ecrire la loi de Fick en précisant la dimension des différentes grandeurs physiques qui interviennent et le sens physique de cette équation.

En déduire l'expression de $\vec{j}$ en fonction de la densité particulaire en nutriments. Donnée: $\overrightarrow{grad}V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e_\phi}$ pour $V = V(r,\theta,\phi)$ en coordonnées sphériques.

La collecte de nutriments par la bactérie peut se quantifier par un flux $\phi_0(r)$ correspondant au nombre de nutriments **entrant** par unité de temps dans une sphère de rayon r centrée sur la bactérie. Nous insistons sur ce choix de convention, commode dans la situation considérée mais inhabituel. Au niveau de la surface de la bactérie, le flux $\phi_0(r = R)$ est déterminé de sorte que la quantité de matière entrante permette d'assurer l'activité métabolique, caractérisée par la quantité de matière de nutriments consommée par unité de temps et de volume de la bactérie notée $\mathcal{A}$ en $mol.^{-1}.m^{-3}$. Nous étudions le régime stationnaire.

2. En considérant un système élémentaire compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ avec $r > R$, montrer que $\phi_0(r)$ est égale à une constante que l'on notera ϕ_0.

3. Exprimer le flux de nutriments ϕ_0 collecté par la bactérie en fonction de sa consommation en nutriments $\mathcal{A}$, du nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_a$ et de son rayon R.

4. Exprimer $\phi_0(r)$ en fonction de $j(r)$ et r puis en fonction de D, r et de $n(r)$. En déduire le profil de densité particulaire $n(r)$ en fonction de n_∞, D, r et ϕ_0. Donner les signes de $j(r)$ et ϕ_0 en expliquant le phénomène étudié.

5. Montrer qu'une bactérie de rayon R donné ne peut pas collecter plus qu'une certaine quantité de nutriments par unité de temps, définissant ainsi une consommation maximale $\mathcal{A}^*$ dont l'expression en fonction de n_∞, D, $\mathcal{N}_a$ et R est à déterminer.

6. En utilisant les données concernant la bactérie d'Escherichia Coli fournis en fin du sujet, déterminer l'ordre de grandeur de concentration en glucose c_m minimale dans le milieu pour qu'une bactérie puisse y survivre.

Données numériques: coefficient de diffusion du glucose dans l'eau $D = 10^{-5}\ cm^2.s^{-1}$, nombre d'Avogadro: $\mathcal{N}_a = 6.10^{23}\ mol^{-1}$.

Caractéristiques d'une bactérie Escherichia Coli: rayon du corps $R = 1\ \mu m$, consommation de glucose par unité de volume de bactérie et de temps $\mathcal{A} = 10\ mol.m^{-3}.s^{-1}$.