Chapitre th 3 : diffusion de particules

Il y a deux façons de transporter des particules d'un point à un autre:

• le transport par déplacement macroscopique de matière: c'est la convection.

• le transport à l'échelle microscopique, sans déplacement macroscopique de matière: c'est la diffusion. La diffusion se produit dans un système où la concentration d'un constituant n'est pas homogène, le constituant migre des zones de forte concentration vers les zones de basse concentration, le phénomène est très lent et cesse lorsque la concentration est uniforme. La diffusion est un phénomène microscopique dont le moteur est l'agitation thermique.

Exemples: sucre dans le café : avec cuillère : convection
sans cuillère : diffusion
on ouvre une bouteille de parfum : avec courant d'air : convection
sans courant d'air : diffusion

I. Bilan de particules

Le nombre total de particules dans un système peut varier pour plusieurs raisons:

- Le système peut échanger des particules avec le milieu extérieur
- Il peut y avoir des particules créées ou des particules qui disparaissent du système (particules produites ou absorbées par des réactions chimiques ou des réactions nucléaires)

On note:

$N(t)$ nbre de particules dans le système à l'instant t

$N(t+dt)$ " " " t + dt

δN_s nbre de particules qui sortent du système entre t et t + dt

δN_e " qui entrent dans le " "

δN_c " qui sont créées dans le " "

δN_a " qui sont absorbées " "

En régime variable, la conservation du nombre de particules s'écrit:

$$N(t+dt) = N(t) + \underbrace{\delta N_e + \delta N_c}_{\text{les particules gagnées par le système sont comptées +}} - \underbrace{\delta N_a - \delta N_s}_{\text{les particules perdues par le système sont comptées -}}$$

En régime stationnaire, la conservation du nombre de particules s'écrit:

$$N(t) = N(t+dt)$$

Le nbre de particules dans le système ne varie pas au cours du temps donc le nombre de particules gagnées par le système est égal au nombre de particules perdues par le système entre t et t + dt.

$$\delta N_e + \delta N_c = \delta N_s + \delta N_a$$

II. **Les grandeurs physiques**

1. La densité particulaire

Sa notation: $n(M,t)$: nombre de particules par unité de volume

$[n]$ = particules $.m^{-3}$ (à préférer à : m^{-3})

Remarque: la relation entre concentration et densité particulaire s'écrit:

$c = \frac{n}{\mathcal{N}_a}$: nbre de moles par unité de volumes

Son utilité: La densité particulaire sert à calculer le nombre de particules présentes dans un volume. On distingue les cas où le volume est élémentaire (volume $d\tau$) ou fini (volume V).

M volume $d\tau$

$dN(t) = n(M,t)\,d\tau$

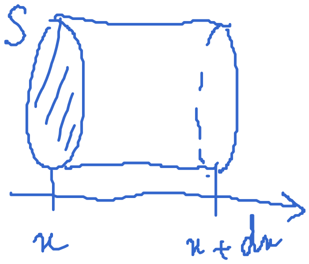
volume V

$N(t) = \iiint n(M,t)\,d\tau$

Rq: $N = n \times V$ uniquement si n est uniforme

Exemples en coordonnées cartésiennes: on note $n = n(x,t)$.

Le nombre de particules présentes à l'instant t_1 dans un cylindre de section S compris entre x et $x+dx$ s'écrit:



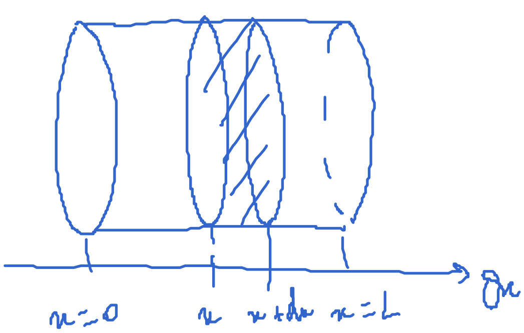
dx est suffisamment petit pour que la densité de particules entre x et x + dx soit uniforme et égale à $n(x,t)$

soit $dN(t_1) = n(x,t_1)\underbrace{S\,dx}_{\text{volume } d\tau}$

Le nombre de particules présentes à l'instant t_2 dans un cylindre de section S compris entre x et $x+dx$ s'écrit:

$dN(t_2) = n(x,t_2)\,S\,dx$

Le nombre de particules présentes à l'instant t_1 dans un cylindre d'axe Ox, de section S compris entre $x=0$ et $x=L$ s'écrit:



⚠ $n(x,t_1)$ n'est pas uniforme

$N(t_1) = \int_{x=0}^{L} \underbrace{n(x,t_1)\,S\,dx}_{\text{nbre de particules entre } x \text{ et } x+dx}$

2. Le flux particulaire et le vecteur densité de particules

Définition: le flux de particules est le nbre de particules qui traversent la section S par unité de temps

$[\phi] = \text{particules}.s^{-1}$

Pour exprimer le flux de particules, on définit une grandeur vectorielle appelée vecteur densité de courant et notée $\overrightarrow{j_D}(M,t)$ dont le sens et la direction sont le sens et la direction du mvt des particules

dont la norme est en particules.$m^{-2}.s^{-1}$

Expression: Le flux particulaire à travers une surface S s'écrit: $\phi = j_D(M,t)\,S$

Le nombre de particules qui traversent une surface S entre les instants t et $t+dt$ s'écrit: $\phi \times dt$

soit $j_D(x,t) \times S \times dt$

Remarque: la relation entre $\overrightarrow{j_D}(M,t)$, $n(M,t)$ et $\overrightarrow{v}$, vitesse des particules s'écrit:

$[j_D] = \text{particules}.m^{-2}.s^{-1}$ $\quad [v] = m.s^{-1}$ $\quad \vec{j_D}(M,t) = n(M,t)\,\vec{v}(M,t)$

$[n] = \text{particules}.m^{-3}$

Le vecteur densité de courant de particules est d'autant plus grand que

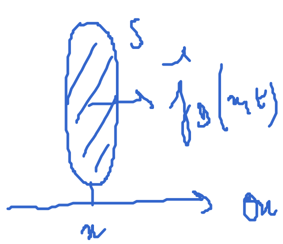
les particules sont vite

les particules sont nombreuses

Son utilité: Le vecteur densité de courant de particules sert à calculer le nombre de particules qui traversent une surface S entre deux instants.

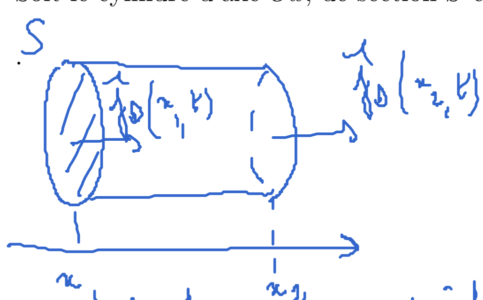
Exemples en coordonnées cartésiennes: on note $\overrightarrow{j_D}(x,t) = j_D(x,t)\overrightarrow{e_x}$.

Le nombre de particules qui traversent une surface S placée en x entre les instants t et $t+dt$ s'écrit:



$\delta N = j_D(x,t)\,S\,dt$

Soit le cylindre d'axe Ox, de section S compris entre x_1 et x_2.



⚠ on représente $\vec{j_D}$ avec une projection > 0 !

Le nombre de particules qui entrent dans le cylindre entre t et $t+dt$ s'écrit: les particules entrent en x_1

$\delta N_e = j_D(x_1,t)\,S\,dt$

Le nombre de particules qui sortent du cylindre entre t et $t+dt$ s'écrit: les particules sortent en x_2

$\delta N_s = j_D(x_2,t)\,S\,dt$

III. **Loi de Fick**

La loi de Fick est une loi phénoménologique (c'est une loi qui décrit le phénomène sans chercher à l'expliquer), elle s'écrit : $\boxed{\overrightarrow{j_D} = -D\ \overrightarrow{\text{grad}}\ n}$ B

où D est un coefficient positif appelé coefficient de diffusion ou diffusivité, il dépend des particules qui diffusent et du support dans lequel elles diffusent.

Unité de D: $[j_D] = \text{particules}.m^{-2}.s^{-1}$ $\qquad [\overrightarrow{\text{grad}}] = \left[\frac{d}{dx}\right] = m^{-1}$

$[n] = \text{particules}.m^{-3}$ $\qquad [D] = \left[\frac{\|\overrightarrow{j_D}\|}{\|\overrightarrow{\text{grad}}\, n\|}\right] = \frac{\text{particules}.m^{-2}.s^{-1}}{\text{particules}.m^{-4}} = m^2.s^{-1}$

Ordres de grandeur de D:

B

diffusion de particules dans un gaz : $D \approx 10^{-5}\ m^2.s^{-1}$

diffusion de particules dans un liquide : $D \approx 10^{-10}\ m^2.s^{-1}$

diffusion de particules dans un solide : $D \approx 10^{-15}\ m^2.s^{-1}$ à $10^{-30}\ m^2.s^{-1}$

+ le milieu est dense, plus c'est difficile aux particules de diffuser ∴ D petit

A une dimension, lorsque la diffusion se produit selon l'axe Ox, la loi de Fick s'écrit:

$n = n(x,t) \qquad \overrightarrow{j_D} = -D\frac{\partial n}{\partial x}(x,t)\,\overrightarrow{e_x}$

Quel est le sens physique de cette loi?

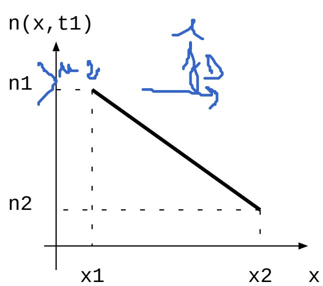
La diffusion se produit en présence d'inhomogénéités de concentrations et cesse lorsque la concentration est uniforme.

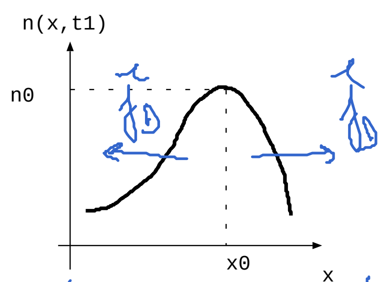
La diffusion se produit des fortes vers les faibles concentrations (sens de $-\overrightarrow{\text{grad}}\, n$)

La diffusion est d'autant + efficace que D est grand et que les inhomogénéités de concentrations sont importantes

Illustration graphique: $j_D(x,t) = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}(x,t)$ où $\dfrac{\partial n}{\partial x}(x,t)$ représente la pente de la tangente à la courbe $n(x,t)$

la diffusion se fait des fortes vers les faibles concentrations





ici $j_D(x,t) > 0$

$j_D = -D\frac{\partial n}{\partial x} = -D\frac{n_1 - n_2}{x_1 - x_2}$

(cas particulier quand $\overrightarrow{j_D}$ est uniforme, n est une fonction affine de x)

$j_D(x < x_0, t) < 0$; $j_D(x > x_0, t) > 0$

$j_D(x_0, t) = 0$

+ la pente de la tangente est grande et plus la valeur absolue de $j_D(x,t)$ est grande

IV. Bilan local de particules

L'objectif de ce paragraphe est d'apprendre à établir l'équation locale traduisant la conservation du nombre de particules en présence de diffusion et éventuellement en présence de sources internes de productions de particules, pour des situations où la densité particulaire ne dépend que d'une coordonnée d'espace.

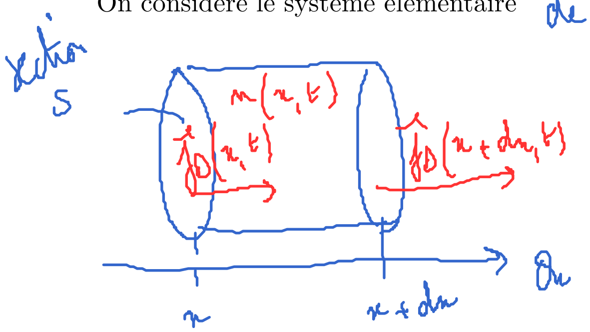
1. *Cas où la diffusion se produit selon Ox*

La diffusion se produit selon Ox dans un système de section S (surface perpendiculaire à la direction Ox). On note $n(x,t)$ la densité particulaire en x à l'instant t et $\overrightarrow{j_D}(x,t) = j_D(x,t)\overrightarrow{e_x}$. On note p le nombre de particules produites par unité de volume et de temps.

On considère le système élémentaire de section S compris entre x et $x+dx$:

Rq 1 : on représente $\vec{j_D}$ avec une projection >0 selon (Ox)

Rq 2 : $n(x,t)$ est uniforme dans le système car dx est petit



Le nombre de particules présentes dans le système à l'instant t s'écrit: $dN(t) = n(x,t)\,S\,dx$

Le nombre de particules présentes dans le système à l'instant $t + dt$ s'écrit: $dN(t+dt) = n(x,t+dt)\,S\,dx$

Le nombre de particules qui entrent (en x) dans le système entre t et $t + dt$ s'écrit: $\delta N_e = j_D(x,t)\,S\,dt$

Le nombre de particules qui sortent (en $x+dx$) du système entre t et $t + dt$ s'écrit: $\delta N_s = j_D(x+dx,t)\,S\,dt$

Le nombre de particules produites dans le système entre t et $t + dt$ s'écrit: $\delta N_p = p \times S\,dx \times dt$

$[p] = \text{particules} \cdot m^{-3} \cdot s^{-1}$

La conservation du nombre de particules s'écrit:

$$dN(t+dt) = dN(t) + \delta N_e - \delta N_s + \delta N_p$$

$$\left[n(x,t+dt) - n(x,t)\right] S\,dx = -\left[j_D(x+dx,t) - j_D(x,t)\right] S\,dt + p\,S\,dx\,dt$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} S\,dx\,dt = -\frac{\partial j_D}{\partial x} S\,dx\,dt + p\,S\,dx\,dt$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_D}{\partial x} + p}$$

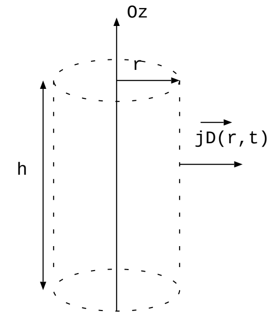
équation locale de conservation de la matière

Remarque: dans le cas où la diffusion se produit selon Ox, Oy et Oz soit $n = n(x,y,z,t)$ et $\overrightarrow{j_D}(x,y,z,t) = j_{Dx}\overrightarrow{e_x} + j_{Dy}\overrightarrow{e_y} + j_{Dz}\overrightarrow{e_z}$, l'équation de conservation du nombre de particules devient:

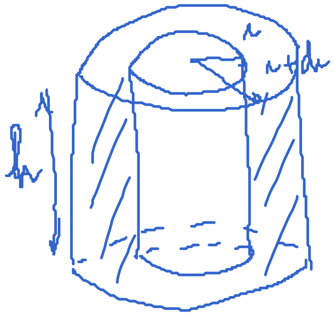
$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_{Dx}}{\partial x} - \frac{\partial j_{Dy}}{\partial y} - \frac{\partial j_{Dz}}{\partial z} + p \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j_D} + p}$$

2. *Cas où la diffusion est radiale dans un cylindre*

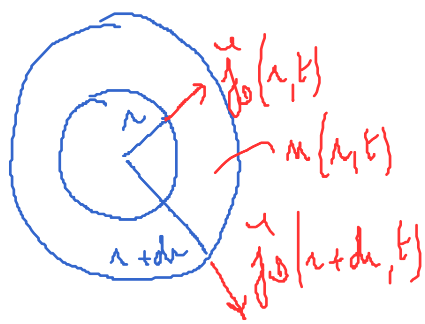
On note $n(r,t)$ la densité particulaire en r à l'instant t et $\overrightarrow{j_D}(r,t) = j_D(r,t)\overrightarrow{e_r}$. On note p le nombre de particules produites par unité de volume et de temps.



On considère le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$:



volume du système
$\pi(r+dr)^2 h - \pi r^2 h$
$\simeq 2\pi r h\, dr$



⚠ On représente $\vec{j_D}$ selon $+\vec{e_r}$

⚠ $n(r,t)$ est uniforme dans le système car dr petit

Le nombre de particules présentes dans le système à l'instant t s'écrit: $dN(t) = n(r,t)\, 2\pi r h \times dr$

Le nombre de particules présentes dans le système à l'instant $t+dt$ s'écrit: $dN(t+dt) = n(r,t+dt)\, 2\pi r h\, dr$

Le nombre de particules qui entrent dans le système entre t et $t+dt$ s'écrit: $\delta N_e = j_D(r,t)\, 2\pi r h\, dt$

en r

Le nombre de particules qui sortent du système entre t et $t+dt$ s'écrit: $\delta N_s = j_D(r+dr,t)\, 2\pi(r+dr) h\, dt$

en $r+dr$

Le nombre de particules produites dans le système entre t et $t+dt$ s'écrit: $\delta N_p = p \times 2\pi r h\, dr \times dt$

$[p] = \text{particules}.m^{-3}.s^{-1}$

La conservation du nombre de particules s'écrit:

$$dN(t+dt) = dN(t) + \delta N_e - \delta N_s + \delta N_p$$

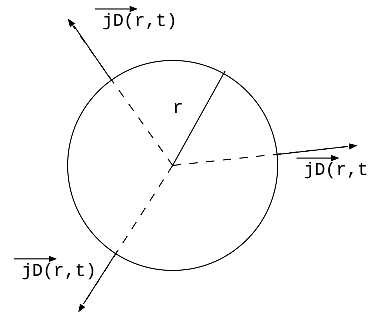
$$\left[n(r+dr,t) - n(r,t)\right] 2\pi r h\, dr = -\left[j_D(r+dr,t)\, 2\pi(r+dr) - j_D(r,t)\, 2\pi r\right] h\, dt + p\, 2\pi r h\, dr\, dt$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} 2\pi r h\, dt\, dr = -\frac{\partial (j_D(r)\, 2\pi r)}{\partial r} h\, dt\, dr + p\, 2\pi r h\, dr\, dt$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} r = -\frac{\partial}{\partial r}\left(j_D(r)\, r\right) + p r$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \underbrace{-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(j_D(r,t)\, r\right)}_{\text{div } \vec{j_D} \text{ en cylindriques}} + p$$

3. *Cas où la diffusion est radiale dans une sphère*

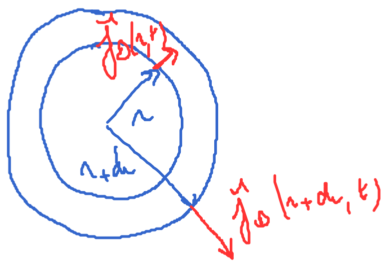


On note $n(r,t)$ la densité particulaire en r à l'instant t et $\overrightarrow{j_D}(r,t) = j_D(r,t)\overrightarrow{e_r}$. On note p le nombre de particules produites par unité de volume et de temps.

On considère le système élémentaire compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$:

Le volume de ce système est $d\tau = 4\pi r^2 \times dr$.

dr est suffisamment petit pour que $n(r,t)$ soit uniforme dans le système



On représente le vecteur $\vec{j}_D$ selon $+\vec{e}_r$ pour la démo, le résultat est valable même si la diffusion se fait selon $-\vec{e}_r$

Le nombre de particules présentes dans le système à l'instant t s'écrit: $N(t) = n(r,t) \times 4\pi r^2 dr$

Le nombre de particules présentes dans le système à l'instant $t+dt$ s'écrit: $N(t+dt) = n(r,t+dt)\, 4\pi r^2 dr$

Le nombre de particules qui entrent dans le système entre t et $t+dt$ s'écrit: $\delta N_e = j_D(r,t) \times 4\pi r^2 dt$

elles entrent en traversant la petite sphère

Le nombre de particules qui sortent du système entre t et $t+dt$ s'écrit: $\delta N_s = j_D(r+dr,t) \times 4\pi(r+dr)^2 dt$

elles sortent en traversant la grande sphère

Le nombre de particules produites dans le système entre t et $t+dt$ s'écrit: $\delta N_p = p \times 4\pi r^2 dr \times dt$

p est un nbre de particules par unité de temps et de volume

La conservation du nombre de particules s'écrit: $N(t+dt) = N(t) + \delta N_e + \delta N_p - \delta N_s$

$$\underbrace{\left[n(r,t+dt) - n(r,t)\right]}_{\frac{\partial n}{\partial t}(r,t)\,dt} 4\pi r^2 dr = -\underbrace{\left(j_D(r+dr,t)\times(r+dr)^2 - j_D(r,t)\times r^2\right)}_{\frac{\partial}{\partial r}\left(j_D(r,t)\times r^2\right)dr} \times 4\pi\, dt + p\, 4\pi r^2 dr\, dt$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 j_D(r,t)\right) \times \frac{1}{r^2} + p$$

on ne peut pas sortir r^2 de la dérivée

V. **Equation de diffusion en régime variable sans production de particules**

L'équation de diffusion est l'équation différentielle aux dérivées partielles vérifiées par la densité particulaire. On la trouve en combinant la loi de Fick et l'équation de conservation du nombre de particules (dite équation bilan local de particules).

1. *Cas de la diffusion à 1D selon Ox.*

La loi de Fick s'écrit: $\vec{j}_D = -D\,\overrightarrow{grad}\, n(x,t) = -D\frac{\partial n}{\partial x}\vec{e}_x$ d'où $j_D = -D\frac{\partial n}{\partial x}$

Le bilan local de particules s'écrit (en absence de production de particules): $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_D}{\partial x}$

On a donc: $\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$ éq. de diffusion selon (Ox) en absence de production ou d'absorption de particules

2. *Cas général à 3D*

La loi de Fick s'écrit: $\vec{j}_D = -D\,\overrightarrow{grad}\, n$

Le bilan local de particules s'écrit (en absence de production de particules): $\frac{\partial n}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{j}_D$

On a donc: $\boxed{\frac{\partial n}{\partial t}} = -\mathrm{div}\left(-D\,\overrightarrow{grad}\, n\right) = \boxed{D\Delta n}$ éq. de diffusion à 3D

Le Laplacien en coordonnées cartésiennes: $\Delta n = \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial n}{\partial z^2}$

Le Laplacien en coordonnées cylindriques ou sphériques: est donné par l'énoncé

3. *Commentaires sur l'équation de diffusion*

Que devient cette équation lorsqu'on change t en $-t$? Commenter.

$\frac{\partial n}{\partial(-t)} = D\Delta n$ soit $-\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$ quand on change t en $-t$, l'éq. de diffusion est modifiée, c'est caractéristique d'un phénomène irréversible

En effet changer t en $-t$ revient à changer le sens du temps

Calculer un ordre de grandeur du temps de diffusion: on note L la distance de diffusion des particules pendant un temps τ:

$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ par analyse dimensionnelle devient : $\frac{n}{\tau} = D\frac{n}{L^2}$

soit $\tau = \frac{L^2}{D}$ ou $L = \sqrt{D\tau}$: la diffusion n'est pas linéaire (quand on × la distance par 2, le temps est × par 4) c'est lié au fait que + elle se produit, − il y a d'inhomogénéités de concentrations et − elle est efficace

Rq : $\boxed{\tau_{convection} = \frac{L}{v}}$

AN: temps de diffusion d'un parfum dans l'air sur une distance $d = 1\ m$

$D_{gaz} = 10^{-5}\ m^2 s^{-1}$ $\tau_{diff} = \frac{d^2}{D} = \frac{1^2}{10^{-5}} = 10^5\ s$

AN: temps de diffusion d'une solution de permanganate de potassium dans l'eau sur une distance $d = 10\ cm$:

$D_{liq} = 10^{-10}\ m^2 s^{-1}$ $\tau_{diff} = \frac{d^2}{D} = \frac{0{,}1^2}{10^{-10}} = 10^8\ s$

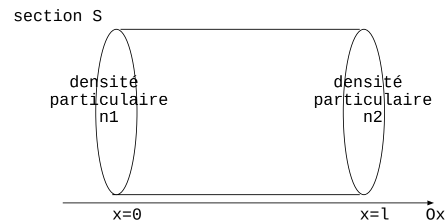
Que devient cette équation en régime stationnaire?

n ne dépend pas du temps soit $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ et $\boxed{\Delta n = 0}$

VI. **Cas du régime stationnaire**

1. *Sans production de particules* :

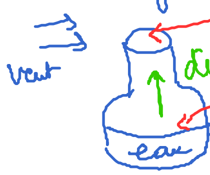
Soit un cylindre d'axe Ox de section S compris entre $x = 0$ et $x = l$. On note $n(x)$ la densité particulaire dans ce cylindre avec $n(x = 0) = n_1$ et $n(x = l) = n_2$, ces densités particulaires sont maintenues constantes au cours du temps aux extrémités du cylindre.



Commentaires préliminaires sur ce dispositif:

Si $n_1 > n_2$: la diffusion va se produire des fortes vers les faibles densités soit elle se produit selon (+ Ox).

Ainsi, des particules disparaissent en $x=0$ et apparaissent en $x = L$, donc n_1 devrait ↓ et n_2 devrait ↑. Pour être en régime stationnaire il faut des systèmes qui maintiennent n_1 et n_2 cstt. Exp:



à cause du vent on a $P_{vapeur\ eau} \simeq 0$

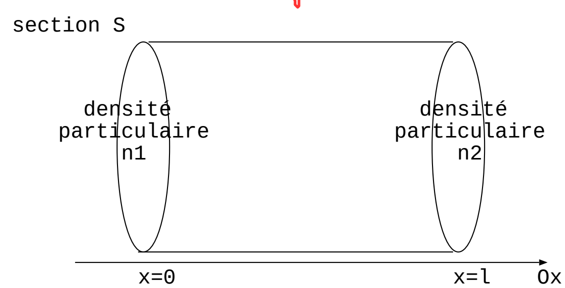
diffusion de l'eau vapeur

à la surface de l'eau P vapeur d'eau est maintenue cstte grâce à l'évaporation

Recherche de $j(x)$ et $n(x)$.

2. *Avec production de particules* :

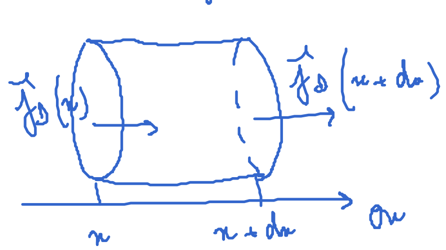
Soit un cylindre d'axe Ox de section S compris entre $x = 0$ et $x = l$. On note $n(x)$ la densité particulaire dans ce cylindre avec $n(x = 0) = n_1$ et $n(x = l) = n_2$, ces densités particulaires sont maintenues constantes au cours du temps aux extrémités du cylindre. Il y a dans ce dispositif production de particules par une réaction chimique, on note p le nombre de particules produites par unité de temps et de volume (p constante positive).



Recherche de $j(x)$ et $n(x)$

Cas où $p=0$

On considère le système élémentaire de section S compris entre x et $x+dx$:



En régime stationnaire, les nbres de particules reçues par le système et perdues par le système entre t et t+dt sont égaux : $\delta N_{reçues} = \delta N_{perdues}$

$$j_D(x) S\,dt = j_D(x+dx) S\,dt$$

donc j_D ne dépend pas de x

loi de Fick : $j_D = -D \frac{dn}{dx}$ soit $\frac{dn}{dx} = -\frac{j_D}{D}$ et $n(x) = -j_D \frac{x}{D} + A$

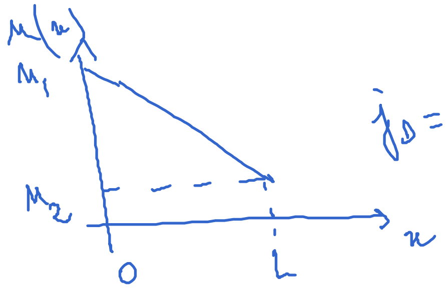
C.L. $n(x=0) = n_1 = A$

$n(x=L) = n_2 = -j_D \frac{L}{D} + A \Rightarrow \boxed{j_D = \frac{(n_1 - n_2)D}{L}}$

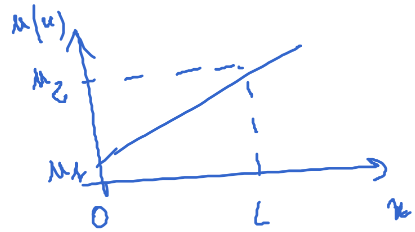
$$\boxed{n(x) = \frac{(n_2 - n_1)}{L} x + n_1}$$

or $\dfrac{dj_D}{dx} = 0$ et $j_D = -D\dfrac{dn}{dx}$ donne $\boxed{\dfrac{d^2n}{dx^2} = 0}$ éq. de diffusion

soit $n(x) = Ax + B$ C.L. $\left.\begin{array}{l} n(x=0) = n_1 = B \\ n(x=L) = n_2 = AL + B \end{array}\right)$ $\boxed{n(x) = \dfrac{n_2 - n_1}{L}x + n_1}$



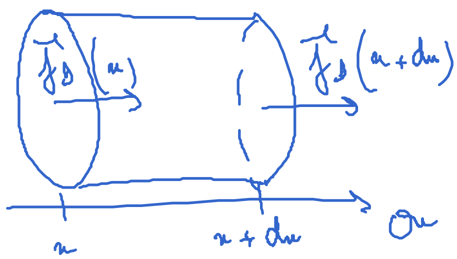
$j_D = -D\dfrac{n_2 - n_1}{L} > 0$



$j_D = -D\dfrac{n_2 - n_1}{L} < 0$

Cas où $p \neq 0$

Soit le système élémentaire de section S compris entre x et $x + dx$:



En régime stationnaire, le nombre de particules dans le système est cst donc le nbre de particules reçues est égale au nbre de particules perdues entre t et $t + dt$.

$$\underbrace{\delta N_e}_{\text{entrantes}} + \underbrace{\delta N_p}_{\text{produites}} = \underbrace{\delta N_s}_{\text{sortantes}}$$

$$j_D(x)S\,dt + p\,S\,dx\,dt = j_D(x+dx)\,S\,dt$$

d'où $\underbrace{[j_D(x+dx) - j_D(x)]}_{\frac{dj_D}{dx}\cancel{dx}}\cancel{S}\cancel{dt} = p\,\cancel{S}\,\cancel{dx}\,\cancel{dt}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dj_D}{dx} = p$

loi de Fick : $j_D = -D\dfrac{dn}{dx}$ d'où $\dfrac{d^2n}{dx^2} = -\dfrac{p}{D}$

$$\frac{dn}{dx} = -\frac{px}{D} + A$$

$$n = -p\frac{x^2}{2D} + Ax + B$$

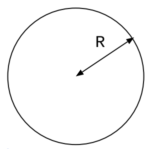
on trouve A et B avec les CL :

$$\left|\begin{array}{l} n(x=0) = n_1 = B \\ n(x=L) = n_2 = -\dfrac{pL^2}{2D} + AL + B \end{array}\right.$$

VII. **Outils mathématiques indispensables**

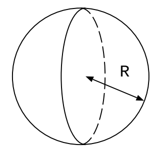
Surfaces:

d'un disque



$S = \pi R^2$

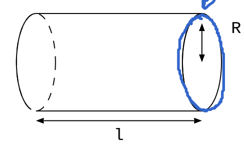
d'une sphère



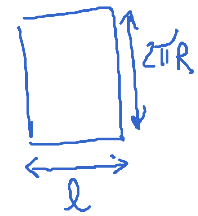
$S = 4\pi R^2$

latérale d'un cylindre

longueur $2\pi R$



=

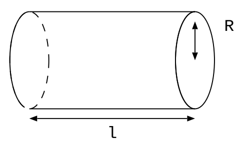


$S = 2\pi R \times l$

.

Volumes:

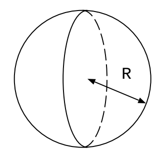
d'un cylindre



$V = \pi R^2 \times l$

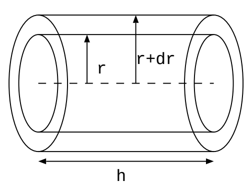
.

d'une sphère



$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

entre 2 cylindres de rayons r et $r + dr$



$d\tau = \pi (r+dr)^2 h - \pi r^2 h$

.

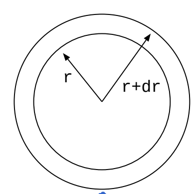
$= \pi \left[\cancel{r^2} + \underbrace{2r\,dr}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{dr^2}_{\text{ordre 2}} \right] h - \cancel{\pi r^2 h}$

dr petit

$d\tau \approx \underbrace{2\pi r\, h}\, \underbrace{dr}$ épaisseur

surface du petit cylindre

entre 2 sphères de rayons r et $r + dr$



$d\tau = \frac{4}{3}\pi (r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4\pi r^3}{3} \left[\left(1 + \frac{dr}{r}\right)^3 - 1 \right]$

$\approx \frac{4\pi r^3}{3} \left(\cancel{1} + 3\frac{dr}{r} - \cancel{1} \right)$

$d\tau \approx \underbrace{4\pi r^2} \times \underbrace{dr}$ épaisseur

surface de la petite sphère

Développements limités:

On rappelle que $f(x + \epsilon) \approx f(x) + \epsilon f'(x)$ pour ϵ petit ou encore $f(x + \epsilon) - f(x) \approx \epsilon f'(x)$.

pour dx petit : $f(x + dx) - f(x) \approx$ $f'(x) \times dx$

pour dt petit : $g(t + dt) - g(t) \approx$ $g'(t) \times dt$

pour dx petit : $f(x + dx, t) - f(x, t) \approx$ $\frac{\partial f}{\partial x} \times dx$

pour dt petit : $g(x, t + dt) - g(x, t) \approx$ $\frac{\partial g}{\partial t} \times dt$