DM 4 de physique

I. Chauffage d'une pièce

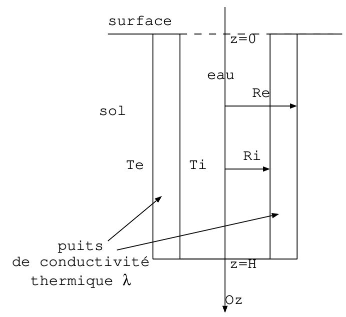
On souhaite maintenir constante la température d'une pièce à $T_i = 20^0C$. La résistance thermique des 4 murs et du sol est $R_1 = 10.10^{-3}\ K.W^{-1}$. La résistance thermique du plafond et des tuiles est $R_2 = 2.10^{-3}\ K.W^{-1}$. La température de l'extérieur (sol et air) est $T_e = 10^0C$. On se place en régime stationnaire.

1. Calculer la puissance thermique P à apporter à la pièce pour maintenir constante la température.

2. On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique R_2' de ce matériau afin de réaliser une économie de 50 % sur la puissance thermique P.

II. Conduction de la chaleur dans un puits

Un puits d'alimentation en eau est modélisé par un cylindre de révolution vertical, de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e, homogène et de conductivité thermique λ. On repère la profondeur à partir de la surface à l'aide d'un axe vertical Oz orienté vers le bas. A l'intérieur du puits se trouve de l'eau à la température T_i et à l'extérieur se trouve le sol de température T_e.



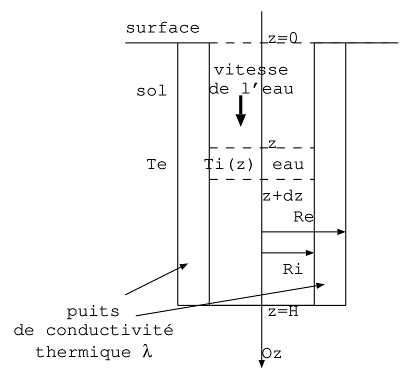
On suppose pour l'instant que toute la surface intérieure du puits est maintenue à la température $T(r = R_i) = T_i$ et que la surface extérieure est maintenue à la température $T(r = R_e) = T_e$ (uniforme également). Les extrémités du tube ($z = 0$ et $z = H$) sont parfaitement isolées thermiquement: T ne dépend que de la distance r à l'axe Oz et on note $\overrightarrow{j} = j(r)\overrightarrow{e_r}$ le vecteur densité de courant thermique. On note $\phi(r)$ le flux thermique sortant du cylindre de hauteur H et de rayon r.

1. Justifier qu'en régime stationnaire, le flux thermique ϕ est le même à travers tout cylindre de hauteur H, d'axe Oz et de rayon r tel que $R_i < r < R_e$.

2. Déterminer la résistance thermique R_{th} de cette conduite en fonction de R_i, R_e, H et λ.

3. En déduire l'expression de la température $T(r)$ à l'intérieur du tube, pour r tel que $R_i < r < R_e$ uniquement en fonction de T_i, T_e, R_i, R_e et r.

En réalité la température de l'eau dans le puits dépend de la profondeur z. On note $T_i(z)$, la température de l'eau à la profondeur z. La température du sol est toujours T_e et est homogène. La température de la paroi du puits ne dépend que de z et de la distance r à l'axe de symétrie Oz du puits, on note $T(r, z)$. On se place en régime stationnaire. On considère que le transfert thermique ne se fait que radialement (on néglige les transferts thermiques par conduction dans la direction Oz). L'eau chaude descend (sens z décroissant) dans le puits. On note c la capacité thermique massique de l'eau, ρ sa masse volumique, et D_m son débit massique.



4. Appliquer le premier principe industriel à la tranche d'eau comprise entre les hauteur z et $z + dz$. En déduire la puissance thermique perdue par l'eau en fonction de D_m, c, dz et $\frac{dT_i}{dz}$.

5. Exprimer, en utilisant la résistance thermique et les résultats de la question 2, la puissance thermique perdue par l'eau en fonction de $T_i(z)$, T_e, λ, dz, R_e et R_i.

6. Déduire des deux questions précédentes que $T_i(z)$ vérifie une équation différentielle de la forme $\frac{dT_i}{dz} + \frac{T_i}{\delta} = \frac{T_e}{\delta}$. Exprimer δ en fonction de λ, D_m, c, R_e et R_i.

7. Exprimer $T_i(z)$ pour $T_i(z = 0) = T_0$.