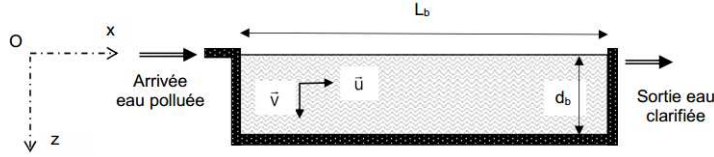


DM 3 de physique

I. Décantation pour le traitement des eaux

La clarification par décantation est une des étapes réalisées dans le traitement des eaux des stations d'épuration. Elle consiste à éliminer les particules polluantes en suspension dans l'eau polluée. L'eau polluée, c'est-à-dire chargée en particules non désirées, circule en continu dans le bassin de décantation, à faible vitesse horizontale $\vec{u}$. Les particules ont le temps de se déposer au fond du bassin et l'eau de sortie est ainsi clarifiée.



Le bassin de décantation est de longueur L_b et de profondeur d_b , sa largeur est indifférente. On note respectivement η et ρ_e la viscosité dynamique et la masse volumique de l'eau polluée. η et ρ_e sont supposées constantes.

On définit le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au bassin. L'axe Oz est vertical descendant. Le niveau d'entrée de l'eau dans le bassin correspond à la cote $z = 0$.

On suppose que les particules polluantes sont sphériques, de rayon R , et qu'elles sont soumises à la force de frottement fluide: $\vec{F} = -6\pi\eta R \vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse des particules.

On note ρ_0 la masse volumique des particules polluantes, supposée constante. On a: $\rho_0 > \rho_e$.

On considère que l'eau arrive en amont du bassin avec une densité en particules polluantes notée N_0 .

Décantation statique

Dans un premier temps, l'eau ne circule pas horizontalement, $\vec{u} = \vec{0}$ et les particules polluantes qu'elle contient chutent verticalement. Compte tenu des phénomènes de transport des particules polluantes dans le bassin, la densité en particules polluantes n'est pas uniforme sur la hauteur du bassin. Elle dépend de la profondeur z . Dans le bassin, on note $n(z)$ la densité en particules polluantes à l'altitude z et n_0 la valeur associée à l'altitude $z = 0$, soit $n_0 = n(z = 0)$.

1. A partir de l'équation différentielle du mouvement, issue de la seconde loi de Newton, établir, en fonction de ρ_0 , ρ_e , R , η et de l'accélération g de la pesanteur, la vitesse limite $\vec{v}_l = v_l \vec{e}_z$ atteinte par ces particules. Quel est le signe de v_l ? Exprimer en fonction de ρ_0 , R et η , le temps caractéristique τ_c d'établissement de cette vitesse limite.

On supposera par la suite que la constante de temps τ_c est très faible devant le temps de sédimentation (i.e. le temps de chute dans le bassin) de sorte que le mouvement des particules est considéré comme uniforme à la vitesse $\vec{v}_l$.

2. Cette chute des particules est à l'origine d'un courant convectif vertical des particules. On note: $\vec{j} = j(z) \vec{e}_z$, le vecteur densité de courant de particules associé. Préciser l'unité de $\vec{j}$. Puis exprimer le vecteur $\vec{j}$ en fonction de $n(z)$ et de $\vec{v}_l$.

En plus du courant précédent, on observe l'existence d'un second courant qui résulte d'un phénomène de diffusion. On note D le coefficient de diffusivité des particules dans l'eau et $\vec{j}_D = j_D(z) \vec{e}_z$ le vecteur densité de courant de particules associé à ce second courant.

3. Rappeler la loi de Fick et préciser les unités des grandeurs qui interviennent. Justifier qualitativement l'existence de ce courant de diffusion. Préciser s'il est ascendant ou descendant en déduire le signe de $j_D(z)$.

4. En régime permanent, ces deux courants se compensent. En déduire, en fonction de n_0 , D et v_l , l'expression de la densité de particules $n(z)$. Représenter graphiquement la fonction $n(z)$ en fonction de z .

5. On note l la largeur du bassin selon Oy .

Exprimer en fonction de N_0 , L_b , d_b et l le nombre total de particules polluantes dans le bassin.

Exprimer ce même nombre de particules en utilisant la fonction $n(z)$.

Par conservation du nombre de particules dans le bassin, exprimer n_0 en fonction de N_0 , D , d_b et de v_l .

6. Définir en fonction de D , d_b et de v_l , un temps caractéristique τ_s de sédimentation, ainsi qu'un temps caractéristique τ_D de diffusion des particules sur la hauteur du bassin.

A quelle condition portant sur τ_s et τ_D , la décantation statique permet-elle une clarification de l'eau ?

Clarification dynamique de l'eau polluée

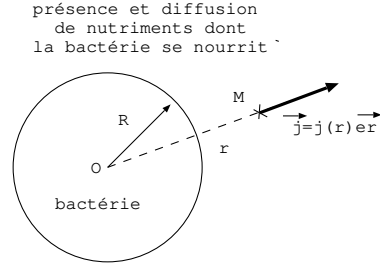
Dans un second temps, l'eau polluée est mise en mouvement et s'écoule avec une vitesse horizontale constante $\vec{u}$. Un aspirateur situé au fond du bassin aspire maintenant les particules polluantes. Un modèle simple considère que le mouvement des particules polluantes est la combinaison d'un mouvement horizontal de vitesse $\vec{u}$ dû à l'entraînement de l'eau et d'un mouvement vertical de chute à la vitesse constante $\vec{v}$ déterminée précédemment dans l'étude de la décantation statique. L'eau sera clarifiée si les particules polluantes introduites à l'entrée du bassin ont le temps de tomber au fond avant que l'eau d'entraînement, injectée à l'entrée du bassin en $x = 0$, ne soit parvenue à l'autre extrémité de sortie du bassin, située en $x = L_b$.

7. Définir en fonction de L_b et u , un temps de traversée τ_t du bassin. À quelle condition, portant sur τ_t et τ_s , la clarification dynamique est-elle efficace ?

II. Diffusion de nutriments autour d'une bactérie

Dans ce problème, nous allons nous intéresser à un aspect de la biophysique des bactéries, s'articulant autour de leur capacité à assurer la présence d'une quantité suffisante de nutriments nécessaire à leur métabolisme dans leur environnement. Nous allons voir qu'une bactérie immobile ne peut pas excéder une taille critique.

Nous assimilons la bactérie à une sphère de rayon R et nous supposons qu'elle absorbe des nutriments à sa surface. Dans le milieu extérieur, les nutriments migrent de façon diffusive, avec un coefficient de diffusion D . Nous appelons $n(r)$ la densité particulaire en nutriments en un point M , placé à la distance r du centre de la bactérie. On note n_∞ la densité particulaire en nutriments très loin de la bactérie. Nous appelons $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$ le vecteur densité de courant de nutriments à l'extérieur de la bactérie.



1. Ecrire la loi de Fick en précisant la dimension des différentes grandeurs physiques qui interviennent et le sens physique de cette équation.

En déduire l'expression de $\vec{j}$ en fonction de la densité particulaire en nutriments. Donnée: $\overrightarrow{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$ pour $V = V(r, \theta, \phi)$ en coordonnées sphériques.

La collecte de nutriments par la bactérie peut se quantifier par un flux $\phi_0(r)$ correspondant au nombre de nutriments **entrant** par unité de temps dans une sphère de rayon r centrée sur la bactérie. Nous insistons sur ce choix de convention, commode dans la situation considérée mais inhabituel. Au niveau de la surface de la bactérie, le flux $\phi_0(r = R)$ est déterminé de sorte que la quantité de matière entrante permette d'assurer l'activité métabolique, caractérisée par la quantité de matière de nutriments consommée par unité de temps et de volume de la bactérie notée $\mathcal{A}$ en $\text{mol.s}^{-1}.\text{m}^{-3}$. Nous étudions le régime stationnaire.

2. En considérant un système élémentaire compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ avec $r > R$, montrer que $\phi_0(r)$ est égale à une constante que l'on notera ϕ_0 .

3. Exprimer le flux de nutriments ϕ_0 collecté par la bactérie en fonction de sa consommation en nutriments $\mathcal{A}$, du nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_a$ et de son rayon R .

4. Exprimer $\phi_0(r)$ en fonction de $j(r)$ et r puis en fonction de D , r et de $n(r)$. En déduire le profil de densité particulaire $n(r)$ en fonction de n_∞ , D , r et ϕ_0 . Donner les signes de $j(r)$ et ϕ_0 en expliquant le phénomène étudié.

5. Montrer qu'une bactérie de rayon R donné ne peut pas collecter plus qu'une certaine quantité de nutriments par unité de temps, définissant ainsi une consommation maximale $\mathcal{A}^*$ dont l'expression en fonction de n_∞ , D , $\mathcal{N}_a$ et R est à déterminer.

6. En utilisant les données concernant la bactérie d'Escherichia Coli fournis en fin du sujet, déterminer l'ordre de grandeur de concentration en glucose c_m minimale dans le milieu pour qu'une bactérie puisse y survivre.

Données numériques: coefficient de diffusion du glucose dans l'eau $D = 10^{-5} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$, nombre d'Avogadro: $\mathcal{N}_a = 6.10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Caractéristiques d'une bactérie Escherichia Coli: rayon du corps $R = 1 \text{ }\mu\text{m}$, consommation de glucose par unité de volume de bactérie et de temps $\mathcal{A} = 10 \text{ mol.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$.

III. Correction: bactérie

1. La loi de Fick s'écrit $\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}n}(r) = -D \frac{dn}{dr} \vec{e}_r$.

$$[j] = \text{particules.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$$

$$[n] = \text{particules.m}^{-3}$$

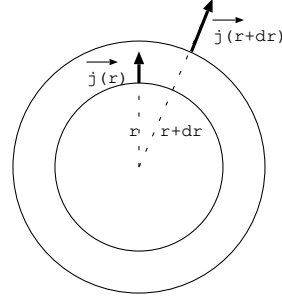
$$[D] = \left[\frac{jD}{||\overrightarrow{\text{grad}n}||} \right] = \left[\frac{jD}{\frac{\partial n}{\partial x}} \right] = \frac{\text{particules.m}^{-2}.\text{s}^{-1}}{\frac{\text{particules.m}^{-3}}{m}} = m^2.\text{s}^{-1}$$

Cette équation signifie que La diffusion de particules se produit des fortes vers les faibles densités de particules.

La diffusion est d'autant plus efficace que le coefficient de diffusion est grand et que les inhomogénéités (ou différences) de densités de particules sont grandes.

La diffusion cesse quand la densité est uniforme.

2. Soit le système élémentaire compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ avec $r > R$. En régime stationnaire, le nombre de nutriments dans le système est constant donc le nombre de nutriments qui entrent dans le système est égal au nombre de nutriments qui sortent du système.



D'après l'énoncé, le nombre de nutriments qui entrent dans le système entre t et $t + dt$ est $\delta N_e = -\phi_O(r)dt$ (en effet d'après le schéma, les nutriments qui entrent dans le système sont ceux qui sortent de la sphère de rayon r) et le nombre de nutriments qui sortent du système entre t et $t + dt$ est $\delta N_s = -\phi_O(r + dr)dt$ (en effet d'après le schéma, les nutriments qui sortent du système sont ceux qui sortent de la sphère de rayon $r + dr$). On a donc $\delta N_e = \delta N_s$ soit $\phi_O(r) = \phi_O(r + dr)$. On en déduit que ϕ_0 ne dépend pas de r , c'est une constante que l'on notera ϕ_0 .

3. Le flux de nutriments ϕ_0 collecté par la bactérie est égal au nombre de nutriments qui entrent dans la bactérie par unité de temps.

$\mathcal{A}$ est égal au nombre de moles de nutriments qui entrent dans la bactérie par unité de temps et de volume de la bactérie.

$$\text{On a donc } \phi_0 = \mathcal{A} \mathcal{N}_a \frac{4}{3} \pi R^3.$$

4. Par définition on a $\phi_0(r) = -j(r)4\pi r^2$ (le signe $-$ est là car le vecteur $\vec{j}$ est orienté selon $+\vec{e}_r$ et on compte les nutriments qui rentrent dans la sphère de rayon r donc ceux qui diffusent selon $-\vec{e}_r$).

La loi de Fick donne $j(r) = -D \frac{dn}{dr}$ donc on a $\phi_0(r) = D \frac{dn}{dr} 4\pi r^2 = \phi_0$.

On utilise l'équation précédente dans laquelle on sépare les variables n et r soit: $4\pi D dn = \phi_0 \frac{dr}{r^2}$ et on

intègre entre r et $+\infty$ (loin de la bactérie) soit $4\pi D \int_{n(r)}^{n_\infty} dn = \phi_0 \int_r^\infty \frac{dr}{r^2}$ qui donne $4\pi D(n(r) - n_\infty) =$

$$\phi_0 \left[\frac{1}{r} \right]_r^\infty = -\frac{\phi_0}{r}.$$

$$\text{On en déduit que } n(r) = n_\infty - \frac{\phi_0}{4\pi D r}.$$

Ici la concentration en nutriments est grande loin de la bactérie et elle est faible près de la bactérie puisque la bactérie en consomme. En régime stationnaire, les nutriments diffusent des fortes vers les faibles concentrations donc ils diffusent se $-\vec{e}_r$. Ainsi les nutriments qui arrivent sur la bactérie sont consommés et la concentration en nutriments au bord de la bactérie est constante.

On a donc $\vec{j}$ selon $-\vec{e}_r$ donc $j(r) < 0$ et $\phi_0 > 0$ et on a bien $n(r) < n_\infty$.

5. La densité particulière en nutriments doit rester positive soit $n(r) = n_\infty - \frac{\phi_0}{4\pi D r} > 0$ impose $n_\infty > \frac{\phi_0}{4\pi D r}$ pour tout r . Ici r est supérieure ou égal à R donc on doit avoir $n_\infty > \frac{\phi_0}{4\pi D R} = \frac{\mathcal{A} \mathcal{N}_a R^2}{3D}$. Ce qui conduit à

$\mathcal{A} < \frac{3Dn_\infty}{\mathcal{N}_a R^2}$. La consommation maximale $\mathcal{A}^*$ de la bactérie est donc $\mathcal{A}^* = \frac{3Dn_\infty}{\mathcal{N}_a R^2}$.

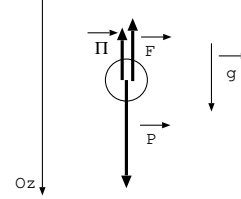
6. Attention de penser à convertir D en $m^2.s^{-1}$ soit $D = 10^{-9} m^2.s^{-1}$.

On a $n_\infty = \frac{\mathcal{N}_a R^2 \mathcal{A}^*}{3D} = 2.10^{21} \text{ nutriments}.m^{-3} = 3,3 \text{ mmol}.m^{-3} = 3,3.10^{-6} \text{ mol}.L^{-1}$.

IV. Correction: décantation

1. Une particule a pour volume $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ et pour masse $m = \rho_0 \frac{4\pi R^3}{3}$.

Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, elle subit son poids $\vec{P} = +\rho_0 \frac{4\pi R^3}{3} g \vec{e}_z$, la poussée d'Archimède (qui est la résultante des forces de pression) $\vec{\Pi} = -\rho_e \frac{4\pi R^3}{3} g \vec{e}_z$ et la force de frottement fluide $\vec{F} = -6\pi R\eta \vec{v}$.



On applique la RFD à la particule soit: $\rho_0 \frac{4\pi R^3}{3} \frac{d\vec{v}}{dt} = +\rho_0 \frac{4\pi R^3}{3} g \vec{e}_z - \rho_e \frac{4\pi R^3}{3} g \vec{e}_z - 6\pi R\eta \vec{v}$.

En posant $\vec{v} = v \vec{e}_z$ et en projetant sur Oz on a: $\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_0 R^2} v = \frac{\rho_0 - \rho_e}{\rho_0} g$.

On trouve la vitesse limite en disant que $\frac{dv}{dt} = 0$ (la vitesse limite est la vitesse en régime stationnaire) soit $\frac{9\eta}{2\rho_0 R^2} v = \frac{\rho_0 - \rho_e}{\rho_0} g$ donne $v_l = \frac{2(\rho_0 - \rho_e)gR^2}{9\eta} > 0$ car $\rho_0 > \rho_e$ donc la particule coule.

Dans l'équation différentielle on pose $\tau = \frac{2\rho_0 R^2}{9\eta}$. Au bout d'un temps de l'ordre de 5τ le régime stationnaire est atteint et la particule a une vitesse constante égale à la vitesse limite.

2. La dimension de j est: $[j] = \text{particules}.m^{-2}.s^{-1}$.

Le vecteur $\vec{j}$ est d'autant plus grand que les particules sont nombreuses et qu'elles vont vite, on a $\vec{j} = n(z) \vec{v}$.

3. La loi de Fick s'écrit $\vec{j}_D = -D \vec{\text{grad}} n = -D \frac{dn}{dz} \vec{e}_z$.

Les dimensions des grandeurs sont:

$$[j_D] = \text{particules}.m^{-2}.s^{-1}$$

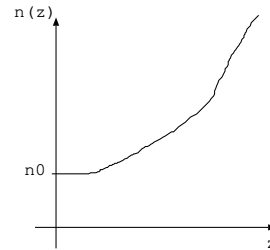
$$[n] = \text{particules}.m^{-3}$$

$$[D] = \left[\frac{j_D}{||\vec{\text{grad}} n||} \right] = \left[\frac{j_D}{\frac{\partial n}{\partial x}} \right] = \frac{\text{particules}.m^{-2}.s^{-1}}{\frac{\text{particules}.m^{-3}}{m}} = m^2.s^{-1}.$$

Les particules tombent sous l'action de leur poids qui est plus important que la poussée d'Archimède donc la concentration en particules est plus grande au fond du bassin qu'en haut du bassin. Les particules diffusent des fortes concentrations vers les faibles concentrations donc la diffusion se fait vers le haut soit $j_D(z) < 0$.

4. En régime permanent on a $\vec{j} + \vec{j}_D = \vec{0}$ soit $n v_l \vec{e}_z - D \frac{dn}{dz} \vec{e}_z = \vec{0}$.

$n(z)$ vérifie donc l'équation différentielle $\frac{dn}{dz} - \frac{v_l}{D} n = 0$. La solution de cette équation différentielle est $n(z) = A e^{+v_l z/D}$ avec pour condition aux limites $n(z=0) = n_0 = A$ soit $n(z) = n_0 e^{+v_l z/D}$ (on trouve bien que $n(z)$ augmente quand z augmente soit la concentration de particules est plus grande en bas du bassin qu'en haut).



5. On écrit que dans le volume du bassin $V = d_b L_b l$ (j'appelle l la largeur du bassin), il y a $N_t = N_0 V = N_0 d_b L_b l$ particules à chaque instant puisque la densité particulaire est N_0 dans le tuyau d'arrivée.

Ensuite ces particules se répartissent non uniformément en hauteur, le nombre total de particules se calcule

donc avec une intégrale: $N_t = \int n(z)d\tau$ avec $d\tau = dxdydz$ en cartésiennes soit $N_t = \int_0^{L_b} dx \int_0^l dy \int_0^{d_b} n(z)dz = L_b l \int_0^{d_b} n_0 e^{+v_l z/D} dz = L_b l n_0 (e^{+v_l d_b/D} - 1) \frac{D}{v_l}$.

La conservation du nombre de particules polluantes s'écrit donc $N_t = N_0 d_b L_b l = L_b l n_0 (e^{+v_l d_b/D} - 1) \frac{D}{v_l}$ soit $n_0 = \frac{N_0 d_b v_l}{D(e^{+v_l d_b/D} - 1)}$.

6. Les particules tombent au fond du bassin à la vitesse v_l , elles mettent donc un temps $\tau_s = \frac{d_b}{v_l}$ pour tomber au fond.

Le coefficient de diffusion est en $m^2.s^{-1}$ soit par homogénéité $D = \frac{d_b^2}{\tau_D}$ donc $\tau_D = \frac{d_b^2}{D}$.

7. Pour que la décantation se fasse, il faut que les particules tombent vite et remontent lentement, ainsi les particules polluantes vont s'accumuler au fond du bassin. On doit donc avoir $\tau_D \gg \tau_s$.

8. Les particules mettent un temps $\tau_t \approx \frac{L_b}{u}$ pour traverser le bassin. Il faut que ce temps soit long devant le temps qu'elles mettent pour tomber au fond du bassin, ainsi elles pourront là encore s'accumuler au fond du bassin soit $\tau_t \gg \tau_s$.